

SYNTAKTISCHE UNABHÄNGIGKEITSBEWEISE
MIT HILFE DER ERZWINGUNGSMETHODE

von

MICHAEL HOLZ

1973
—

SYNTAKTISCHE UNABHÄNGIGKEITSBEWEISE
MIT HILFE DER ERZWINGUNGSMETHODE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität in München

Vorgelegt von

Michael Holz
aus Hannover

am 15. Juni 1973

SYNTAKTISCHE NACHSCHAU
MIT HILFE DER ERZÄHLMETHODEN



1. Berichterstatter: Professor Dr. Kurt Schütte
2. Berichterstatter: Dozent Dr. Horst Osswald

Tag der mündlichen Prüfung: 21.12.1973

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Einleitung	3
Kapitel 1: K-Erzwingungsrelationen	6
§ 1: Ein formales System der ZF-Mengenlehre	6
§ 2: Gödelisierung der Metasprache	15
§ 3: Definition der K-Erzwingung	20
§ 4: Eigenschaften der Erzwingungsrelationen	25
§ 5: Erzwingung der logischen Axiome und Regeln	31
§ 6: Grenzen von syntaktischen Konsistenzbeweisen	40
Kapitel 2: Die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese	43
§ 1: Erzwingung von (Ax_1) - (Ax_4) und (Ax_7)	44
§ 2: Erzwingung des Ersetzungsaxioms	50
§ 3: Erzwingung des Unendlichkeitsaxioms	53
§ 4: Erzwingung des Auswahlaxioms	55
§ 5: Die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese	58
Kapitel 3: Die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms	67
§ 1: Symmetrische Mengen	68
§ 2: Das Symmetriema	71
§ 3: Erzwingung von (Ax_1) , $(Ax_2)^*$ - $(Ax_4)^*$ und (Ax_7)	75
§ 4: Erzwingung von $(Ax_5)^*$, (Ax_9) und (Ax_6)	78
§ 5: Erzwingung der Negation des Auswahlaxioms	81
Literaturverzeichnis	85
Liste der Symbole	87

Einleitung

Im Jahre 1963 veröffentlichte P.J. Cohen seine Arbeiten, die die Fragen der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese von den Axiomen der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre (im Folgenden stets ZF genannt) lösten (siehe Cohen[2]). Es war schon vorher bekannt, daß diese Lösung nicht durch die Methode der inneren Modelle erfolgen konnte, d.h. daß man keine ZF-Formel $A(v_0)$ mit genau einer freien Variablen v_0 angeben konnte, so daß die durch diese Formel beschriebene Teilklasse des Universums alle Axiome von ZF und zusätzlich die Negation des Konstrukti-
bilitätsaxioms von Gödel[8] (bzw. die des Auswahlaxioms oder der Kontinuumshypothese) erfüllt. Dies zeigten Shepherdson[19] und Cohen[1] durch die Konstruktion eines sog. Minimalmodells, eines abzählbaren transitiven Standardmodells von ZF, das in jedes andere Standardmodell von ZF isomorph einbettbar ist (vergleiche auch Karp[14], S.18f). (Dabei bedeute "Standardmodell von ZF" eine Gesamtheit von Mengen mit der üblichen $\in$ - Relation, für die alle ZF-Axiome gelten, "transitiv" die Eigenschaft, daß jedes Element dieser Gesamtheit auch Teilmenge von ihr ist).

Cohens wesentliche Entdeckung war nun, daß man durch Adjunktion sogenannter generischer Mengen zu einem abzählbaren transitiven Standardmodell N von ZF ein ZF-Modell N' finden kann, das Erweiterung von N ist und in dem jeweils die Negation eines der eingangs erwähnten Axiome gilt. Um solche generischen Mengen zu erhalten, bediente er sich der von ihm entdeckten Erzwingungsmethode. Die Beschreibung von N' erfolgt mit Hilfe der verzweigten Hierarchie der konstruktiblen Mengen, die Gödel in seiner Arbeit von 1938 (siehe [7]) verwandte. Beweise ähnlicher Art findet man zum Bei-

spiel in Cohen[4], Levy[15], Jensen[12] und Felgner[5]. Cohen benutzte in [2] und [3] die Hierarchie aus Gödel[8].

Solovay verallgemeinerte den Erzwingungsbegriff mit Hilfe halbgeordneter Strukturen (siehe auch Cohen[4], S.127f). Daß man Erzwingung von Aussagen auch als Boole'sche Bewertungen dieser Aussagen auffassen kann, entdeckten D. Scott, Solovay und Vopenka. Unabhängigkeitsbeweise mit Hilfe Boolesch-wertiger Modelle findet man zum Beispiel bei D.Scott[18], Jensen[13], Görnemann[9] und Jech[11].

In dieser Arbeit soll nun, ausgehend von einer Anregung von Cohen in [4], S. 147, die Voraussetzung "Es gibt ein abzählbares transitives Standardmodell von ZF" (die man aus dem Axiom "Es gibt ein Standardmodell von ZF", einem Axiom, das stärker ist als das Axiom "Es gibt ein Modell von ZF", erhält) vermieden werden, zudem die Verwendung der konstruktiblen Hierarchie und die Methode der Boole'schen Modelle. Wir gehen aus von dem Ansatz von Shoenfield in [21], § 5, entwickeln dann jedoch eine Methode für syntaktische Unabhängigkeitsbeweise, die der Gödelschen Beweismethode mit Hilfe innerer Modelle ähnlich ist.

Mit ZFC bezeichnen wir ZF mit dem Auswahlaxiom als zusätzlichem Axiom (und schreiben dafür auch $ZF + \text{Auswahlaxiom}$). Nach den Ergebnissen von Gödel gibt es einen finiten Beweis für die Aussage: Ist ZF widerspruchsfrei, so auch ZFC. Wir geben in Kapitel 1 eine formale Definition des Erzwingungsbegriffs an, in die als Parameter eine ZF-Formel $K(v_0)$ mit genau einer freien Variablen v_0 und eine Menge C , die Menge der Bedingungen, eingehen. Wir wollen unsere erwünschten Aussagen als (in ZF) gödelisierte Aussagen über Konstanten für Mengen x mit der Eigenschaft $K(x)$ erzwingen. Die Definition gestattet es uns, zu jedem Beweis einer geschlossenen Formel A in

der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität in finiter Weise den Beweis einer Formel in ZF anzugeben, die besagt, daß alle Bedingungen (die Gödelmenge von) A schwach erzwingen (zur Definition siehe Kapitel 1, § 3). Ist nun T eine Theorie in der Sprache von ZF und können wir K und C so angeben, daß wir zu jedem nicht-logischen Axiom B von T in finiter Weise einen Beweis in ZFC einer Formel angeben können, die besagt, daß alle Bedingungen B schwach erzwingen, so erhalten wir zusammen mit der Tatsache, daß keine Bedingung eine Formel A und ihre Negation $\neg A$ erzwingt, einen finiten Beweis für die Aussage: Ist ZFC widerspruchsfrei, so auch T (zur Präzisierung siehe Kapitel 1, § 5).

In den Kapiteln 2 und 3 geben wir Beispiele für diese Methode mit $T = \text{ZFC} + \text{Negation der Kontinuumhypothese}$ und $T = \text{ZF} + \text{Negation des Auswahlaxioms}$.

Eine Bemerkung zur Numerierung: Wird in einem Kapitel n ein Unterabschnitt eines Paragraphen desselben Kapitels zitiert, so lassen wir die Kapitelnummer weg. Das Zitat $n.m.i$ bezieht sich auf Kapitel n , § m , Abschnitt i .

Kapitel 1: K - Erzwingungsrelationen

In diesem Kapitel sollen die allgemeinen Voraussetzungen zu syntaktischen Unabhängigkeitsbeweisen mit Hilfe des Erzwingungsbegriffs erarbeitet werden, für die wir in Kapitel 2 und Kapitel 3 Beispiele bringen werden. In § 1 beschreiben wir das formale System ZF, in dem wir argumentieren, und bringen die notwendigen Definitionen und Theoreme. In § 2 erfolgt die Gödelisierung der Metasprache, in § 3 die Definition der K-Erzwingungsrelationen. Als Parameter geht stets eine ZF-Formel K mit genau einer freien Variablen ein. Sie beschreibt den "label-space" im Sinne von Cohen [4], d.h. durch passende Wahl von K werden wir später unsere erwünschten Aussagen als (Gödelisierte) Aussagen über Konstanten für Elemente aus K erzwingen. § 4 bringt die wichtigsten Lemmata über den Erzwingungsbegriff, in § 5 zeigen wir, daß alle Formeln, die rein quantorenlogisch herleitbar sind, unabhängig von der Wahl von K und der Menge C der Bedingungen erzwungen werden. Schließlich folgt in § 6 eine kurze Bemerkung über die Grenzen für syntaktische Konsistenzbeweise.

§ 1 Ein formales System der ZF-Mengenlehre

Im Folgenden geben wir ein formales System einer axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo, Fraenkel und Skolem im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität an, auf das wir uns stets mit der Abkürzung ZF beziehen.

1.1 Grundzeichen von ZF sind:

abzählbar viele Variable $v_0, v_1, v_2, \dots$;

die Junktoren $\neg, \vee$ (Negation und Adjunktion);

der Quantor $\exists$ (Existenzquantor);

die Zeichen $\in$ und $=$ (Elementbeziehung und Gleichheit).

Als Mitteilungszeichen für Variable gebrauchen wir x, y, z, u, v, w , auch mit Indizes.

1.2 Induktive Definition der Formeln von ZF:

- (1) Sind x und y Variable, so sind $\neg xy$ und $\in xy$ Formeln (sog. atomare Formeln).
- (2) Sind A und B Formeln, so auch $\neg A$ und $\forall AB$.
- (3) Ist A eine Formel und x eine Variable, so ist $\exists xA$ eine Formel.

Als Mitteilungszeichen für Formeln verwenden wir $A, B, D, \dots$, auch mit Indizes.

Induktive Definition des Ranges einer Formel D (im Zeichen $rg(D)$):

- (1) Ist D atomar, so ist $rg(D) := 0$.
- (2) $rg(\neg A) := rg(A) + 1$.
- (3) $rg(\forall AB) := \max(rg(A), rg(B)) + 1$.
- (4) $rg(\exists xA) := rg(A) + 1$.

1.3 Freies und gebundenes Auftreten einer Variablen in einer Formel werden wie üblich definiert. Die Schreibweise $A(x_1, \dots, x_n)$ soll bedeuten, daß in der Formel A die Variablen $x_1, \dots, x_n$ frei auftreten.

Wir haben die klammerfreie Schreibweise für Formeln gewählt, um die spätere Gödelisierung zu erleichtern. Eine ausführliche Darstellung findet man in Shoenfield[20], S. 15f. Wie üblich gebrauchen wir die folgenden Abkürzungen: $(x = y)$ für $\neg xy$, $(x \in y)$ für $\in xy$, $(x \not\vdash y)$ für $\neg(x \vdash y)$, $(x \not\in y)$ für $\neg(x \in y)$, $(A \vee B)$ für $\forall AB$, $(A \rightarrow B)$ für $(\neg A \vee B)$, $(A \wedge B)$ für $\neg(A \rightarrow \neg B)$, $(A \leftrightarrow B)$ für $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ und $\forall xA$ für $\neg \exists x(\neg A)$. Die üblichen Konventionen zur Klammerersparnis werden stillschweigend verwendet; so binden $\vee, \wedge$ stärker als $\rightarrow, \leftrightarrow$, Klammerung bei Ausdrücken der Form $A \vee B \vee D$ erfolgt von rechts. Beschränkte Quantifizierungen der Form $\forall x \in y(A)$ und $\exists x \in y(A)$ sollen Abkürzungen für die Formeln $\forall x(x \in y \rightarrow A)$ bzw. $\exists x(x \in y \wedge A)$ sein.

1.4 Logische Axiome und Schlußregeln von ZF:

- (1) Aussagenlogische Axiome sind alle Formeln der Gestalt $(\neg A \vee A)$.
- (2) Quantorenlogische Axiome sind alle Formeln der Gestalt $(A(x) \rightarrow \exists x A)$.
- (3) Gleichheitsaxiome sind alle Formeln der Gestalt $(x = x)$, $(x=y \wedge x=z \rightarrow y=z)$ und $(x=y \wedge z=u \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in u))$.
- (4) Schlußregeln sind die folgenden:

Ausdehnungsregel: $A \vdash B \vee A$,

Kürzungsregel: $A \vee A \vdash A$,

Assoziativregel: $A \vee (B \vee D) \vdash (A \vee B) \vee D$,

Schnittregel: $A \vee B, \neg A \vee D \vdash B \vee D$,

$\exists$ -Einführungsregel: $A \rightarrow B \vdash \exists x A \rightarrow B$, falls x eine Variable ist, die in B nicht frei auftritt.

(Dabei ist $\vdash$ das übliche Herleitungszeichen).

Induktive Definition der Herleitbarkeit einer Formel A aus einer Formelmenge φ :

- (1) Ist A ein aussagenlogisches bzw. quantorenlogisches Axiom oder ein Gleichheitsaxiom oder eine Formel aus φ , so ist A aus φ herleitbar.
- (2) Ist A Konklusion einer Schlußregel und sind deren Prämissen aus φ herleitbar, so ist A aus φ herleitbar.

Wir schreiben dann: $\varphi \vdash A$ oder auch $\vdash_{\varphi} A$.

1.5 Mengentheoretische (d.h. nichtlogische) Axiome von ZF sind die Allabschlüsse der folgenden Formeln:

(Ax1): $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$ (Extensionalitätsaxiom),

(Ax2): $\exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$ (Paarmengenaxiom),

(Ax3): $\exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow \exists y(z \in y \wedge y \in x))$ (Axiom der Vereinigungsmenge),

(Ax4): $\exists u \forall z(\forall v(v \in z \rightarrow v \in x) \leftrightarrow z \in u)$ (Potenzmengenaxiom),

$$(Ax5): \forall x \forall y \forall z (A(x,y) \wedge A(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \rightarrow \forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge A(u,z))) ,$$

wobei $A(x,y)$ eine Formel ist, in der die Variable w nicht frei auftritt (Ersetzungsaxiome),

$$(Ax6): \exists u (\exists y (y \in u \wedge \forall z (z \notin y)) \wedge \forall z (z \in u \rightarrow \exists y (y \in u \wedge \\ \wedge \forall v (v \in y \leftrightarrow v \in z \vee v = z))))$$

(Unendlichkeitsaxiom),

$$(Ax7): \exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall v (v \in y \rightarrow v \notin x))$$

(Fundierungsaxiom).

Eine Formel A heißt herleitbar in ZF (im Zeichen $ZF \vdash A$ oder auch $\vdash_{ZF} A$), falls A aus der Formelmenge herleitbar ist, deren Elemente die Formeln $(Ax1)-(Ax4)$, $(Ax6)$, $(Ax7)$ sowie alle Fälle von $(Ax5)$ sind. Erweitern wir diese Formelmenge noch um das Auswahlaxiom $(Ax8)$ (siehe 1.7), so heißt A herleitbar in ZFC.

1.6 Bezeichnungen und Definitionen

$$x \subseteq y: \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \quad (x \text{ ist Teilmenge von } y)$$

$$u = 0: \leftrightarrow \forall z (z \notin u) \quad (u \text{ ist die leere Menge })$$

$$u = \{x,y\}: \leftrightarrow \forall z (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y), \quad \{x\} := \{x,x\} \quad (\text{s. (Ax2)})$$

$$u = Ux: \leftrightarrow \forall z (z \in u \rightarrow \exists y (z \in y \wedge y \in x)) \quad (\text{siehe (Ax3)})$$

$$\text{Trs}(u): \leftrightarrow \forall x (x \in u \rightarrow x \subseteq u) \quad (u \text{ ist transitiv })$$

$$\text{Ord}(u): \leftrightarrow \text{Trs}(u) \wedge \forall x \forall y (x \in u \wedge y \in u \rightarrow x \in y \vee x = y \vee y \in x)$$

(u ist Ordinalzahl)

$$\text{Lim}(u): \leftrightarrow \text{Ord}(u) \wedge u \neq 0 \wedge Uu = u \quad (u \text{ ist Limeszahl })$$

$$u = \langle x,y \rangle: \leftrightarrow \forall z (z \in u \leftrightarrow z = \{x\} \vee z = \{x,y\})$$

(u ist das geordnete Paar aus x und y)

Analog werden wie üblich $x \cup y := U\{x,y\}$, $\cap u$ (Durchschnitt),

Pu (Potenzmenge), $\text{Su} := u \cup \{u\}$ (Nachfolger), $\text{Rel}(u)$ (u ist Relation), $\text{Fkt}(u)$ (u ist Funktion), $\text{D}(u)$ (der Definitionsbereich

von u), $W(u)$ (der Wertebereich von u), $Bij(u)$ (u ist Bijektion) und $u \times v$ (das kartesische Produkt von u und v) definiert. Mitteilungszeichen für Ordinalzahlen sind kleine griechische Buchstaben $\alpha, \sigma, \dots$. Mit ω bezeichnen wir stets die kleinste transfinite Ordinalzahl.

Ist u eine Funktion, so schreiben wir statt $\langle x, y \rangle \in u$ auch $y = u(x)$. Ist u eine Relation, so sei $u''x := \{y: \exists z \in x (\langle y, z \rangle \in u)\}$ (die Gesamtheit der u -Vorgänger von Elementen aus x).

Ist u eine Menge und $\leq$ eine Teilmenge von $u \times u$, die auf u eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation definiert, so schreiben wir Halbordnung($u, \leq$). Gilt Halbordnung($u, \leq$) und existiert zu $x, y \in u$ ein $z \in u$ mit $\langle x, z \rangle \in \leq$ und $\langle y, z \rangle \in \leq$ (im Zeichen $x \leq z$ und $y \leq z$), so nennen wir x und y verträglich und schreiben $Vtr(x, y)$.

1.7 Def.: $CF(w, x) \leftrightarrow Fkt(w) \wedge D(w) = Px - \{0\} \wedge \forall y (y \in D(w) \rightarrow w(y) \in y)$
(w ist Auswahlfunktion zur Menge x).

Wir können jetzt das Auswahlaxiom formulieren:

(Ax8): $\forall x \exists w (CF(w, x))$.

Im System ZFC (i.e. das System ZF mit zusätzlichem Axiom (Ax8))

sei $\aleph$ die "Ordnungsfunktion" der transfiniten Kardinalzahlen,

$|x|$ die Kardinalzahl der Menge x ; die kardinale Arithmetik sei wie

üblich eingeführt. Die Kontinuumhypothese (CH): $\neg \exists x (\aleph_0 < |x| < 2^{\aleph_0})$

läßt sich dann formulieren durch $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, die verallgemeinerte Kontinuumhypothese (GCH) durch $\forall \alpha (\text{Ord}(\alpha) \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.

1.8 Klassenterme

Um unsere Ausführungen zu vereinfachen, werden wir mit Klassentermen (als definierten Termen) der Form $\{x:A\}$ (wobei A eine

Formel ist) arbeiten. Nennen wir Ausdrücke, in denen Klassenterme auftreten, Formeln im weiteren Sinne (die induktive Defi-

nition erfolgt kanonisch), so läßt sich ein effektives Verfahren

angeben, mit dem jede Formel im weiteren Sinne zu einer Formel unseres Systems ZF reduziert werden kann, d.h. jede Formel A^* im weiteren Sinne ist Abkürzung einer Formel A von ZF. (Eine genaue Behandlung findet man in [22], S. 10f). Dies ersieht man leicht aus den folgenden Definitionen: sind A^* , B^* Formeln im weiteren Sinne, so sei

- (1) $x \in \{z: A^*(z)\} : \leftrightarrow A^*(x)$,
- (2) $\{z: A^*(z)\} \in x : \leftrightarrow \exists y \in x \forall z (z \in y \leftrightarrow A^*(z))$ und
- (3) $\{z: A^*(z)\} \in \{z: B^*(z)\} : \leftrightarrow \exists y \in \{z: B^*(z)\} \forall v (v \in y \leftrightarrow A^*(v))$.

Wir gebrauchen stets die folgenden Klassenterme:

$On := \{z: Ord(z)\}$ (Klasse der Ordinalzahlen),

V (die "Allklasse"; eine präzise Definition erfolgt in 1.9),

$x^{<\omega} := \{z: Fkt(z) \wedge D(z) \subseteq \omega \wedge W(z) \subseteq x\}$ (die Menge der endlichen Folgen von Elementen aus x),

$Seq := \{z: Fkt(z) \wedge D(z) \subseteq On\}$.

1.9 Die von-Neumann'schen Stufen

Def.: $V_0 := \emptyset$

$V_{\alpha+1} := P(V_\alpha)$

$Lim(\alpha) \rightarrow V_\alpha := \bigcup \{V_\sigma : \sigma < \alpha\}$

$V := \bigcup \{V_\alpha : \alpha \in On\}$

Mit Hilfe des Fundierungsaxioms kann in ZF gezeigt werden, daß jede Menge Element eines der V_α ist. V kann in ZF definiert werden, d.h. es gibt eine Formel $D_V(v_0, v_1)$ mit

$\vdash_{ZF} \forall v_1 (Ord(v_1) \rightarrow \exists! v_0 (D_V(v_0, v_1)))$ und

$\vdash_{ZF} D_V(0, 0) \wedge \forall \alpha \forall v_2 (D_V(v_2, \alpha) \rightarrow D_V(Pv_2, S\alpha)) \wedge \forall \sigma \forall v_3 (Lim(\sigma) \wedge Seq(v_3) \wedge \forall \beta < \sigma (D_V(v_3(\beta), \beta)) \rightarrow D_V(U(W(v_3)), \sigma))$.

Def.: $r(x) := \bigcap \{\alpha : x \subseteq V_\alpha\}$ (der Rang der Menge x).

Vermöge $\neg_{ZF} \forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$ und der Rangfunktion induzieren die Induktions- und Rekursionsprinzipien für Ordinalzahlen die folgenden Induktions- und Rekursionsprinzipien für Mengen:

(1) Ist $A(x)$ eine ZF-Formel, so gilt

$$\neg_{ZF} \forall x (\forall y \in x (A(y)) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x) \quad .$$

(2) Ist G eine $n+1$ -stellige ZF-definierbare Funktion (siehe Definition von V durch $D_V(x,y)$) auf dem Universum V , so gibt es eine eindeutige ZF-definierbare Funktion F , so daß für alle $x_1, \dots, x_n$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = G(\{F(y, x_2, \dots, x_n) : y \in x_1\}, x_2, \dots, x_n) \quad .$$

Die Beweise findet man z. Bsp. in Shoenfield[20], S. 249ff. Die Sätze gestatten uns insbesondere induktive Definitionen nach dem Rang von Mengen.

1.10 Der allgemeine Rekursionssatz

Def.: $\text{Fund}(u) : \leftrightarrow \text{Rel}(u) \wedge \forall x (u''\{x\} \in V) \wedge$
 $\wedge \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (y \in x \wedge x \cap u''\{y\} = 0))$
 (u ist fundierte Relation).

Allgemeiner können wir definieren:

Def.: $A(x,y)$ sei eine Formel mit genau den freien Variablen x und y . A definiert eine fundierte Relation g.d.w. gilt
 $\neg_{ZF} \forall x \exists y (x \in y \wedge \forall z (\exists u \in y (A(z,u)) \rightarrow z \in y)) \wedge$
 $\wedge \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists z \in x \forall u \in x (\neg A(u,z))) \quad .$

$\text{Fund}[A]$ sei eine Abkürzung für diese Formel.

Das erste Glied der Konjunktion kann ersetzt werden durch
 $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow A(z,x)) \quad .$

Theorem (Induktionsprinzip für fundierte Relationen):

Ist $B(z)$ eine ZF-Formel, so gilt $\neg_{ZF} \text{Ind}[A,B] \quad ,$

wobei $\text{Ind}[A, B] := (\text{Fund}[A] \rightarrow (\forall x (\forall z (A(z, x) \rightarrow B(z)) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x B(x)))$.

Beweis: $\text{Fund}[A] \wedge \exists x (\neg B(x)) \rightarrow$
 $\rightarrow \exists y (x \in y \wedge \forall z (\exists w \in y (A(z, w)) \rightarrow z \in y))$
 $\exists v \forall z (z \in v \leftrightarrow z \in y \wedge \neg B(z))$
 $v \neq \emptyset$, da $x \in v$
 $\rightarrow \exists z \in v \forall u \in v (\neg A(u, z))$
 $\rightarrow \exists z \in y (\neg B(z) \wedge \forall u (A(u, z) \rightarrow B(u) \vee u \notin y))$
 $z \in y \wedge A(u, z) \rightarrow u \in y$
 $\rightarrow \exists z \in y (\neg B(z) \wedge \forall u (A(u, z) \rightarrow B(u)))$.

Durch Kontraposition folgt die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Induktionsprinzips läßt sich nun der allgemeine Rekursionssatz formulieren:

Theorem: Ist G eine ZF-definierbare Funktion auf V und R eine ZF-definierbare fundierte Relation, so gibt es eine eindeutige ZF-definierbare Funktion F auf V , so daß für alle x gilt: $F(x) = G(\langle x, F \upharpoonright (R''\{x\}) \rangle)$.

Bemerkung: Sei $A(x, y)$ eine Formel mit $\vdash_{ZF} \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \wedge A(x, z) \rightarrow y = z)$ (abgekürzt mit $\vdash \text{Fkt}[A]$). Ist dann B eine Formel, die eine fundierte Relation definiert, so besagt der Satz: es läßt sich eine Formel $C(x, y)$ angeben, so daß

$\vdash \text{Fkt}[A] \wedge \forall x \exists y A(x, y) \wedge \text{Fund}[B] \rightarrow \text{Fkt}[C] \wedge \forall x \exists y C(x, y) \wedge$
 $\wedge \forall x \forall y (C(x, y) \leftrightarrow A(\langle x, w \rangle, y))$, wobei

$\forall z (z \in w \leftrightarrow \exists u (R(u, x) \wedge C(u, z)))$ gilt.

Der Beweis ist langwierig und soll hier nicht erbracht werden. Einen Beweis für Klassenterme findet man in Jensen[13], S. 7ff. Das Theorem läßt sich entsprechend für Prädikate formulieren. Der verallgemeinerte Rekursionssatz erlaubt uns, in ZF Definitionen mit Hilfe fundierter Relationen zu treffen.

1.11 Äquivalente Axiomensysteme

Ein Aussonderungsaxiom ist jede Formel der Art

$$(Ax9): \forall x \forall z_1 \dots \forall z_n \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z)), \quad \text{wobei}$$

$z_1, \dots, z_n$ die von z verschiedenen freien Variablen der Formel A sind ($0 \leq n$) und y nicht frei in A auftritt.

Mit ZF^* bezeichnen wir das System, das aus ZF entsteht, wenn $(Ax9)$ hinzugefügt wird und wenn die Axiome $(Ax2)-(Ax5)$ ersetzt werden durch die Allabschlüsse von

$$(Ax2)^*: \exists u \forall z (z = x \vee z = y \rightarrow z \in u),$$

$$(Ax3)^*: \exists u \forall z (\exists y (z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in u),$$

$$(Ax4)^*: \exists u \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in u) \quad \text{und}$$

$$(Ax5)^*: \forall x \forall y \forall z (A'(x,y) \wedge A'(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow$$

$$\rightarrow \forall x \exists w \forall z (\exists u (u \in x \wedge A'(u,z)) \rightarrow z \in w), \quad \text{wobei}$$

$A'(x,y)$ eine Formel ist, in der w nicht frei auftritt.

Bekanntlich sind ZF und ZF^* äquivalente Systeme, denn mit $(Ax9)$ folgt $(Ax1)$ aus $(Ax1)^*$ ($i=2, \dots, 5$). Umgekehrt impliziert $(Ax5)$

$(Ax9)$: sei $A(z)$ gegeben, ohne wesentliche Einschränkung sei z einzige freie Variable von A . Wir definieren: $B(x,z) \leftrightarrow A(z) \wedge z = x$.

B erfüllt die Voraussetzung von $(Ax5)$, also existiert zu $x \in V$ ein $y \in V$ mit $\forall z (z \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge B(v,z)))$. Daraus folgt sofort $\forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$.

Bezeichnen wir mit $(Ax8)^*$ die Formel

$$\begin{aligned} \forall z (\forall w \in z (w \neq 0) \wedge \forall w_1 \forall w_2 (w_1 \in z \wedge w_2 \in z \wedge w_1 \cap w_2 \neq 0 \rightarrow w_1 = w_2) \rightarrow \\ \rightarrow \exists y \forall w \in z \exists! v \in y (v \in w)), \quad \text{so gilt} \end{aligned}$$

bekanntlich: $\vdash_{ZF} (Ax8) \leftrightarrow (Ax8)^*$, d.h. die Systeme ZFC und $ZF + (Ax8)^*$ sind äquivalent.

§ 2 Gödelisierung der Metasprache

In diesem Paragraphen sollen die technischen Mittel zur Definition der Erzwingungsrelationen in § 3 bereitgestellt werden. Wir werden die Begriffe Zeichenreihe, Formel, Substitution u. a. in ZF formulieren. Dabei beziehen wir uns stets auf die schon erwähnte Formel $K(v_0)$ ^{*)}; K-Formeln und K-Aussagen entstehen aus gödelisierten Formeln, indem man gewisse freie Variable durch Konstanten für Mengen mit der Eigenschaft K ersetzt. Natürliche Zahlen werden sowohl in der Metasprache als auch in der Objektsprache benutzt, dasselbe gilt für Induktionsbeweise. Beim objektsprachlichen Gebrauch werden wir natürliche Zahlen durch einen hochgestellten Punkt kennzeichnen (siehe 2.1). Wenn der Zusammenhang klar ist, werden wir die Punkte auch weglassen. Alle Definitionen und Beweise erfolgen in ZF; falls wir finite Induktion in der Metasprache verwenden, werden wir dies ausdrücklich erwähnen.

2.1 Def.: $ZR(z) \leftrightarrow Fkt(z) \wedge D(z) \in \omega \wedge D(z) \neq 0$ (z ist Zeichenreihe).

$$\begin{aligned} Kom := \{ \langle \langle x, y \rangle, z \rangle : ZR(x) \wedge ZR(y) \wedge ZR(z) \wedge D(z) = D(x) \dot{+} D(y) \wedge \\ \wedge z = \{ \langle v, x(v) \rangle : v < D(x) \} \cup \{ \langle D(x) \dot{+} v, y(v) \rangle : v < D(y) \} \} \\ (z \text{ ist Komposition der Zeichenreihen } x \text{ und } y). \end{aligned}$$

Statt $z = Kom(\langle x, y \rangle)$ schreiben wir $z = xy$.

Die Existenz von Nichtstandardmodellen der natürlichen Zahlen erfordert eine Unterscheidung zwischen beliebigen Elementen aus ω und den Elementen, die durch die folgende Definition charakterisiert werden.

Def.: Wir definieren für jede natürliche Zahl n durch metasprach-

$$\begin{aligned} \text{liche Induktion: } (1) \delta := 0 \\ (2) \dot{n+1} := S(\dot{n}) \quad (\text{Standardzahlen}). \end{aligned}$$

Bemerkung: für jede natürliche Zahl n gilt $\vdash_{ZF} \dot{n} \in \omega$.

Gödelmengen von Grundzeichen werden als Zeichenreihen der Länge 1

^{*)}Generelle Vorauss.: $\{x: K(x)\} \neq 0$; ebenso $C \neq 0$.

definiert (wobei die Länge einer Zeichenreihe ihr Definitionsbereich ist):

Def.: $\ulcorner 0 \urcorner := \{ \langle 0, \langle 0, \dot{2} \rangle \rangle \}$

$\ulcorner 1 \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{1}, \dot{2} \rangle \rangle \}$

$\ulcorner \neg \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{2}, \dot{2} \rangle \rangle \}$

$\ulcorner \vee \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{3}, \dot{2} \rangle \rangle \}$

$\ulcorner \exists \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{4}, \dot{2} \rangle \rangle \}$

$\ulcorner \forall_k \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{k}, \dot{1} \rangle \rangle \}$ für jede natürliche Zahl k.

Allgemeiner definieren wir:

$GZ(x) := \leftrightarrow x = \langle 0, \dot{2} \rangle \vee x = \langle \dot{1}, \dot{2} \rangle \vee x = \langle \dot{2}, \dot{2} \rangle \vee x = \langle \dot{3}, \dot{2} \rangle \vee x = \langle \dot{4}, \dot{2} \rangle$

$\vee \exists y (y \in \omega \wedge x = \langle y, \dot{1} \rangle)$ (x ist Grundzeichen).

$GZ := \{ x : GZ(x) \}$.

Bem.: Ist a ein Grundzeichen von ZF, so gilt $\vdash_{ZF} \ulcorner a \urcorner \in GZ^{\omega}$.

Def.: $Kst(x) := \leftrightarrow Fkt(x) \wedge D(x) = \dot{1} \wedge \exists z (W(x) = \{ \langle z, 0 \rangle \})$ (x ist Konstante).

Bezeichnung: $\underline{x} := \{ \langle 0, \langle x, 0 \rangle \rangle \}$ (die zu x gehörende Konstante $\underline{x}$).

2.2 Def.: $AtF(x) := \leftrightarrow \exists y \in \omega \exists z \in \omega (x = \{ \langle 0, \langle 0, \dot{2} \rangle \rangle, \langle \dot{1}, \langle y, \dot{1} \rangle \rangle, \langle \dot{2}, \langle z, \dot{1} \rangle \rangle \} \vee$
 $\vee x = \{ \langle 0, \langle \dot{1}, \dot{2} \rangle \rangle, \langle \dot{1}, \langle y, \dot{1} \rangle \rangle, \langle \dot{2}, \langle z, \dot{1} \rangle \rangle \})$

(x ist atomare Formel).

$AtF := \{ x : AtF(x) \}$.

Für natürliche Zahlen k und l definieren wir:

$\ulcorner \forall_k \in \forall_l \urcorner := \{ \langle 0, \langle 0, \dot{2} \rangle \rangle, \langle \dot{1}, \langle \dot{k}, \dot{1} \rangle \rangle, \langle \dot{2}, \langle \dot{l}, \dot{1} \rangle \rangle \}$,

$\ulcorner \forall_k = \forall_l \urcorner := \{ \langle 0, \langle \dot{1}, \dot{2} \rangle \rangle, \langle \dot{1}, \langle \dot{k}, \dot{1} \rangle \rangle, \langle \dot{2}, \langle \dot{l}, \dot{1} \rangle \rangle \}$.

Bem.: Es gilt $\vdash_{ZF} AtF \subseteq GZ^{\omega}$, ferner gilt für alle natürlichen

Zahlen k und l: $\vdash_{ZF} \ulcorner \forall_k \in \forall_l \urcorner \in AtF \wedge \ulcorner \forall_k = \forall_l \urcorner \in AtF$.

Wir definieren rekursiv die Menge Fml der "Formeln": für $\alpha \in \omega$ sei

$Fml(0) := AtF$

$Fml(S(\alpha)) := Fml(\alpha) \cup \{ x : \exists y \in Fml(\alpha) (x = \ulcorner \neg y \urcorner) \} \cup$

$\cup \{ x : \exists y \exists z (y \in Fml(\alpha) \wedge z \in Fml(\alpha) \wedge x = \ulcorner \forall yz \urcorner) \} \cup$

$$\cup \{x: \exists y \in \text{Fml}(\alpha) \exists z \in \omega (x = \exists^{\ulcorner z \urcorner} y)\},$$

wobei für $z \in \omega$ $\ulcorner z \urcorner := \{\langle 0, \langle z, 1 \rangle \rangle\}$.

$\text{Fml}(\alpha) := 0$, falls $\text{Lim}(\alpha)$.

$\text{Fml} := \cup \{\text{Fml}(\alpha) : \alpha \in \omega\}$.

Bem.: es gilt $\vdash_{ZF} \text{Fml} \subseteq \text{GZ}^{\omega}$.

Induktive Definition der Gödelmenge $\ulcorner D \urcorner$ für ZF-Formeln D:

(1) Ist D atomar, so ist $\ulcorner D \urcorner$ bereits definiert;

(2) $\ulcorner \neg A \urcorner := \ulcorner \neg \urcorner \ulcorner A \urcorner$;

(3) $\ulcorner \forall A \urcorner := \ulcorner \forall \urcorner \ulcorner A \urcorner$;

(4) $\ulcorner \exists v_k A \urcorner := \ulcorner \exists \urcorner \ulcorner v_k \urcorner \ulcorner A \urcorner$.

Def.: $\text{Rg}(x) := \cap \{x : \alpha \in \omega \wedge (x \in \text{Fml} \rightarrow x \in \text{Fml}(\alpha))\}$.

Lemma: (1) Für jede Formel D gilt: $\vdash_{ZF} \ulcorner D \urcorner \in \text{Fml}$;

(2) Ist D eine Formel mit $\text{rg}(D) = n$ (siehe 1.2), so gilt $\vdash_{ZF} \text{Rg}(\ulcorner D \urcorner) = \dot{n}$.

Beweis: durch metasprachliche Induktion nach $\text{rg}(D)$.

2.3 Wir definieren rekursiv eine Funktion Var mit $D(\text{Var}) = \text{Fml}$. Für $x \in \text{Fml}$ ist $\text{Var}(x)$ die Menge der Indizes derjenigen freien Variablen, die in x "frei auftreten". Für $x \in \text{Fml}$ sei

$\text{Var}(x) := \text{Vbl}(\text{Rg}(x))$ mit

$\text{Vbl}(0) := \{\langle x, \{x(1), x(2)\} \rangle : x \in \text{AtF}\}$;

$\text{Vbl}(S(\alpha)) := \text{Vbl}(\alpha) \cup \{\langle \ulcorner \neg \urcorner y, \text{Vbl}(\alpha)(y) \rangle : y \in \text{Fml}(\alpha) \} \cup$
 $\cup \{\langle \ulcorner \forall \urcorner yz, \text{Vbl}(\alpha)(y) \cup \text{Vbl}(\alpha)(z) \rangle : y, z \in \text{Fml}(\alpha) \} \cup$
 $\cup \{\langle \ulcorner \exists \urcorner \ulcorner z \urcorner y, \text{Vbl}(\alpha)(y) - \{z\} \rangle : z \in \omega \wedge y \in \text{Fml}(\alpha) \}$;

$\text{Vbl}(\alpha) := 0$, falls $\text{Lim}(\alpha)$.

Durch formale vollständige Induktion in ZF über α zeigt man das

Lemma: $\vdash_{ZF} \forall \alpha \in \omega (\text{Fkt}(\text{Vbl}(\alpha)))$.

Lemma: Ist A eine Formel mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ und ist $\text{rg}(A) = m$, so gilt:

$$\vdash_{ZF} \langle \ulcorner A \urcorner, \{\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n\} \rangle \in \text{Vbl}(\dot{m}).$$

Beweis: durch metasprachliche Induktion nach $rg(A)$. Der Beweis ist evident wie die Beweise aller vorangehenden Lemmata dieses Paragraphen, soll aber als Beispiel hier geführt werden. Ist A atomar und $x := \ulcorner v_k \in \overline{v_1} \urcorner$, $y := \ulcorner v_k \in \overline{v_1} \urcorner$, so gilt:

$\vdash (x \in Fml(0) \wedge y \in Fml(0) \wedge x(\dot{i}) = \dot{k} \wedge y(\dot{i}) = \dot{k} \wedge x(\dot{2}) = \dot{i} \wedge y(\dot{2}) = \dot{i})$, ferner $\vdash \langle x, \{x(1), x(2)\} \rangle \in Vbl(0)$, also $\vdash \langle x, \{\dot{k}, \dot{i}\} \rangle \in Vbl(0)$. Analog für y. Mit $\dot{o} = 0$ erhält man die Induktionsbasis.

Hat A die Form $\neg B$ bzw. $\forall B$, so erfolgt der Beweis kanonisch.

Hat A die Form $\exists v_1 B$, ist $rg(A) = m+1$, so gilt nach Ind.-Vor.

und 2.2: $\vdash \langle \ulcorner B \urcorner, \{\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n, \dot{i}\} \rangle \in Vbl(\dot{m}) \wedge \ulcorner B \urcorner \in Fml(\dot{m})$ (falls v_1 in B frei auftritt). Mit $\vdash \langle \exists v_1 \ulcorner B \urcorner, Vbl(\dot{m}) - \{\dot{i}\} \rangle \in Vbl(\dot{m+1})$

und $\vdash \langle \ulcorner A \urcorner, \{\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n\} \rangle$

folgt die Behauptung.

$Fr(u, w, x)$ bedeute inhaltlich, daß an der Stelle u die Variable mit Index w frei auftritt, d.h. wir definieren:

$$Fr(u, w, x) := \leftrightarrow x \in Fml \wedge u \in \omega \wedge w \in \omega \wedge x(u) = \langle w, 1 \rangle \wedge w \in Var(x) \wedge \\ \wedge \exists y (y \in Fml \wedge w \notin Var(y) \wedge \exists v (v \leq u < (v \dot{+} D(y)) \wedge \\ \wedge \{ \langle v \dot{+} j, y(j) \rangle : j < D(y) \} \subseteq x)).$$

Für $w \in \omega$ und $x \in Fml$ sei $Fr(w, x) := \{z : Fr(z, w, x)\}$.

Def.: Für $\alpha \in \omega$ sei

$$Aus(\alpha) := \{x : x \in Fml \wedge Rg(x) \leq \alpha \wedge Var(x) = \emptyset\}.$$

2.4 Def.: $Subst_K(x, y) := \leftrightarrow ZR(y) \wedge x \in Fml \wedge D(y) = D(x) \wedge Var(x) \not\vdash \emptyset \wedge$

$$\wedge \exists z \subseteq Var(x) [\forall u \in z \exists v \in K \forall w \in Fr(u, x) (y(w) = \langle v, 0 \rangle) \\ \wedge \forall w \in D(x) (\neg \exists u \in z (w \in Fr(u, x)) \rightarrow y(w) = x(w))].$$

$VSubst_K(x, y) := \leftrightarrow ZR(y) \wedge x \in Fml \wedge D(y) = D(x) \wedge Var(x) \not\vdash \emptyset \wedge$

$$\wedge \forall u \in Var(x) \exists v \in K \forall w \in Fr(u, x) (y(w) = \langle v, 0 \rangle) \wedge \\ \wedge \forall w \in D(x) (\neg \exists u \in Var(x) (w \in Fr(u, x)) \rightarrow y(w) = x(w)).$$

Das bedeutet inhaltlich: die Zeichenreihe y entsteht aus der Formel x , indem man gewisse (bzw. alle) freie Variablen in x durch Konstante für Elemente aus K substituiert.

Def.: Für $\alpha \in \omega$ sei

$$KF(\alpha, y): \leftrightarrow y \in \text{Aus}(\alpha) \vee \exists x (x \in \text{Fml} \wedge Rg(x) \leq \alpha \wedge \text{Subst}_K(x, y)) ;$$

$$KA(\alpha, y): \leftrightarrow y \in \text{Aus}(\alpha) \vee \exists x (x \in \text{Fml} \wedge Rg(x) \leq \alpha \wedge \text{VSubst}_K(x, y)).$$

(y ist K -Formel vom Grad $\leq \alpha$ (s.u.) bzw. K -Aussage vom Grad $\leq \alpha$).

$$Gr^*(\alpha, y): \leftrightarrow KF(\alpha, y) \wedge \forall \sigma < \alpha (\neg KF(\sigma, y))$$

(y ist K -Formel vom Grad * α).

$$KF(y): \leftrightarrow \exists \alpha \in \omega (KF(\alpha, y)) ;$$

$$KA(y): \leftrightarrow \exists \alpha \in \omega (KA(\alpha, y)).$$

Wie in 1.8 vereinbart, führen wir für die so definierten Formeln Klassenterme ein und schreiben $y \in KA$ für $KA(y)$, $y \in KF(\alpha)$ für $KF(\alpha, y)$, $Gr^*(y) = \alpha$ für $Gr^*(\alpha, y)$ usw..

2.5 Def.: Ist A eine Formel mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$, so sei $\text{Sub}_K^A(\ulcorner A \urcorner, \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n, x_1, \dots, x_n)$ für $x_1, \dots, x_n \in K$ als Zeichenreihe wie folgt definiert:

$$z = \text{Sub}_K^A(\ulcorner A \urcorner, \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n, x_1, \dots, x_n): \leftrightarrow ZR(z) \wedge D(z) = D(\ulcorner A \urcorner) \wedge \bigwedge_{j=1}^n (\forall w \in \text{Fr}(\dot{k}_j, \ulcorner A \urcorner)(z(w) = \langle x_j, 0 \rangle) \wedge \forall w \in D(z) (\neg \exists u \in \{ \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n \} (w \in \text{Fr}(u, \ulcorner A \urcorner) \rightarrow z(w) = \ulcorner A \urcorner(w))).$$

Dabei bedeute $\bigwedge_{j=1}^n B_j$ die Konjunktion der Formeln $B_1, \dots, B_n$.

Es ergibt sich unmittelbar das folgende

$$\text{Lemma: } \vdash_{ZF} z = \text{Sub}_K^A(\ulcorner A \urcorner, \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n, x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{j=1}^n (x_j \in K) \rightarrow \rightarrow KA(z) \wedge \text{VSubst}_K(\ulcorner A \urcorner, z) \wedge (Rg(\ulcorner A \urcorner) = \dot{m} \rightarrow KA(\dot{m}, z)).$$

Def.: Für $u \in \omega$, $v \in K$, $y \in KF$ definieren wir

$$z = \text{Ers}(u, v, y): \leftrightarrow \exists x [x \in \text{Fml} \wedge u \in \text{Var}(x) \wedge \text{VSubst}_K(x, z) \wedge \forall w \in \text{Fr}(u, x)(y(w) = x(w)) \wedge \text{Subst}_K(x, y) \wedge$$

$$\wedge v w \in D(y) (y(w) = \langle u, 1 \rangle \wedge w \in \text{Fr}(u, x) \rightarrow z(w) = \langle v, 0 \rangle) \wedge$$

$$\wedge v w \in D(y) ((y(w) \neq \langle u, 1 \rangle \vee w \notin \text{Fr}(u, x)) \rightarrow z(w) = y(w)).$$

(die K-Aussage z und die K-Formel y entstehen durch Substitution aus einer Formel x und unterscheiden sich nur dadurch, daß an allen Stellen, an denen die Variable mit Index u in x frei auftritt, z den Wert $\langle v, 0 \rangle$ annimmt. Wir sagen dann auch: die K-Aussage z entsteht aus der K-Formel y , indem die Variable mit Index u an allen Stellen, an denen sie in y "frei auftritt", durch die Konstante $\underline{v}$ ersetzt wird).

Lemma: $\vdash_{ZF} \alpha \in \omega \wedge \text{KF}(\alpha, y) \wedge u \in \omega \wedge v \in K \wedge z = \text{Ers}(u, v, y) \rightarrow \text{KA}(\alpha, z)$.

§ 3 Definition der K-Erzwingung

Wir geben eine formalisierte Definition der Erzwingungsrelationen an. Bekanntlich läßt sich keine einzelne Formel $A(v_0, v_1)$ von ZF angeben, die simultan für alle K-Aussagen x und alle Bedingungen p die Relation " p erzwingt x " definiert. Dies kann jedoch für jede natürliche Zahl n für K-Aussagen x mit $\text{Grad}(x) \leq n$ (s.u.) durchgeführt werden (siehe Cohen[4], S. 121). Wir folgen nicht der ursprünglichen Fassung von Cohen in [1],[2],[3],[4], sondern vermeiden den Aufbau einer verzweigten Sprache (siehe Shoenfield[21], §5).

3.1 Def.: $\text{QKA}(z) := \leftrightarrow \text{KA}(0, z) \vee \exists x (\text{KA}(0, x) \wedge z = \neg x)$

(z ist quasiatomare K-Aussage). In vereinfachender Schreibweise: $\text{QK} := \{z : \text{QKA}(z)\} =:$

$$=: \{z : \exists x, y \in K (z = (\underline{x} \in \underline{y}) \vee z = (\underline{x} = \underline{y}) \vee z = (\underline{x} \neq \underline{y}) \vee z = (\underline{x} \neq \underline{y}))\}.$$

B.h.: die Zeichenreihe $\{\langle 0, \langle 0, 2 \rangle \rangle, \langle 1, \langle x, 0 \rangle \rangle, \langle 2, \langle y, 0 \rangle \rangle\}$ teilen wir mit durch $(\underline{x} \in \underline{y})$ usw.; Verwechslungen mit ZF-Formeln werden durch die Konvention vermieden, daß bei Ausdrücken, in denen Konstanten auftreten, stets entsprechende Elemente aus KF bzw. KA gemeint sind.

$C, \leq$ seien Klassenterme von ZF mit

$$\vdash_{ZF} C \in V \wedge \leq \in V \wedge \text{Halbordnung}(C, \leq).$$

Die Elemente von C nennen wir informal Bedingungen und teilen sie mit durch p, q, r, s, t , auch mit Indizes. Beschränkte Quantifizierungen der Form $\forall p \leq q(A)$ sind Abkürzungen für $\forall x(x \in C \wedge \langle x, q \rangle \in \leq \rightarrow A)$.

3.2 Def.: $\in_C(x, y) : \leftrightarrow \exists z \in C(\langle x, z \rangle \in y)$.

Statt $\in_C(x, y)$ schreiben wir auch $x \in_C y$.

Lemma: Die Formel $\in_C$ definiert eine fundierte Relation.

Beweis: (1) Zu zeigen(s. 1.10): $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \in_C(z, x))$.

Es gilt: $\in_C(z, x) \rightarrow r(z) < r(x)$, d.h.

$\{z: \in_C(z, x)\} \subseteq \{z: r(z) < r(x)\}$, also $\{z: \in_C(z, x)\} \in V$.

(2) $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists z \in x \forall u \in x(\neg \in_C(u, z)))$.

Ann.: $\exists x(x \neq 0 \wedge \forall z \in x \exists u \in x(\in_C(u, z)))$. Nach (1):

$\exists x(x \neq 0 \wedge \forall z \in x \exists u \in x(r(u) < r(z)))$.

Sei $w := \{r(z): z \in x\}$. Es gilt $w \in V$, $w \neq 0$. Also ex.

nach (Ax7) ein $u_0 \in w$ mit $u_0 \cap w = 0$. Nach Ann. ex. jedoch

zu $u_0 := r(z_0)$, $z_0 \in x$, ein $z_1 \in x$ mit $r(z_1) < r(z_0)$, d.h.

$r(z_1) \in u_0 \cap w$, ein Widerspruch.

3.3 Für jede natürliche Zahl n definieren wir eine ZF-Formel $E_n(x, y)$,

die eine Relation von der Menge der Bedingungen C nach der Klasse

$KA(\dot{n})$ beschreibt. Diese Relation nennen wir $\Vdash_n^*$ (starke Forcing-

Relation im Sinne von Cohen[4]). Statt $E_n(x, y)$ schreiben wir

für $x \in C$, $y \in KA(\dot{n})$ auch $x \Vdash_n^* y$ und sagen: die Bedingung x er-

zwingt (stark) die K -Aussage y . Wesentlich ist die Induktions-

basis. Sie weist Analogien zur Methode der booleschen Modelle

auf (siehe Scott[18]), unterscheidet sich jedoch wesentlich

in der Behandlung der Gleichheit, in der wir Shoenfield [21], §5 folgen.

Def.: $R_0(u, v) : \leftrightarrow u \in QK \wedge v \in QK \wedge$

$$\begin{aligned} & \wedge [\exists x, y, z \in K (u = (\underline{x} = \underline{z}) \wedge v = (\underline{x} \in \underline{y}) \wedge z \in_C y) \vee \\ & \vee \exists x, y \in K (u = (\underline{x} \neq \underline{y}) \wedge v = (\underline{x} = \underline{y})) \vee \\ & \vee \exists x, y, z \in K ((u = (\underline{z} \neq \underline{y}) \wedge v = (\underline{x} \neq \underline{y}) \wedge z \in_C x) \vee \\ & \vee (u = (\underline{z} \neq x) \wedge v = (\underline{x} \neq \underline{y}) \wedge z \in_C y)) \vee \\ & \vee \exists x, y \in K (u = (\underline{x} \in \underline{y}) \wedge v = (\underline{x} \neq \underline{y}))]. \end{aligned}$$

Lemma: R_0 definiert eine fundierte Relation.

Beweis: (1) Da nach 3.2 $\in_C$ eine fundierte Relation definiert, gilt für jedes $v \in QK$: $\{u : u \in QK \wedge R_0(u, v)\} \in V$.

(2) Wir definieren für $(\underline{x} \pi \underline{y}) \in QK$ (wobei π eines der Symbole $\in, \neq, =, \neq$ ist) $H((\underline{x} \pi \underline{y})) := r(x) \neq r(y)$ (dabei ist $\neq$ die natürliche Summe von Ordinalzahlen). Es gilt mit $\in_C(x, y) \rightarrow r(x) < r(y)$:

$R_0(w, v) \wedge (v = (\underline{x} \in \underline{y}) \vee v = (\underline{x} \neq \underline{y})) \rightarrow H(w) < H(v)$. Ferner

haben $(\underline{x} = \underline{y})$ und $(\underline{x} \neq \underline{y})$ nur einen R_0 -Vorgänger mit gleichem H -Wert. Wir nehmen an: $\exists u (u \neq 0 \wedge \forall z \in u \exists w \in u (R_0(w, z)))$.

Es folgt insbesondere $u \subseteq QK$. Sei $b := \{H(z) : z \in u\}$; es ist

$b \in V$, da $u \in V$. Nach (Ax7) ex. $z_0 \in u$, so daß $H(z_0) \cap b = 0$.

1. Fall: $z_0 = (\underline{x} \in \underline{y})$ oder $z_0 = (\underline{x} \neq \underline{y})$. Nach Ann. ex. $z_1 \in u$ mit $R_0(z_1, z_0)$. Da $H(z_1) < H(z_0)$, ist dies ein Widerspruch zu $H(z_0) \cap b = 0$.

2. Fall: $z_0 = (\underline{x} = \underline{y})$ oder $z_0 = (\underline{x} \neq \underline{y})$. Nach Ann. ex. $z_1 \in u$ mit $R_0(z_1, z_0)$, also $z_1 = (\underline{x} \neq \underline{y})$ oder $z_1 = (\underline{x} \in \underline{y})$. Man erhält analog zu Fall 1 einen Widerspruch.

3.4 Für $p, q \in C$; $u, v \in QK$ sei die Relation R definiert durch

$$R(\langle p, u \rangle, \langle q, v \rangle) : \leftrightarrow R_0(u, v).$$

Bemerkung: R definiert eine fundierte Relation, da dies für R_0 gilt und da $C \in V$.

Wir modifizieren unsere Definition des Grades von K-Aussagen:

Ist $y \in KA$, so sei $Gr(0,y) : \leftrightarrow y \in QK$;

$$Gr(\alpha+1,y) : \leftrightarrow y \notin QK \wedge Gr^*(\alpha+1,y) . (\alpha \in \omega) .$$

3.5 Mit Hilfe des allgemeinen Rekursionstheorems (s. 1.10) können wir wegen der Fundiertheit der Relation R Folgendes definieren:

Def.: Für $p \in C$, $v \in QK$ sei $E_0(p,v) : \leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \exists x,y \in K(v=(\underline{x} = \underline{y}) \wedge \exists z \in K \exists s \leq p (\langle z,s \rangle \in y \wedge E_0(p,(\underline{x} = \underline{z})))) \vee \\ & \vee \exists x,y \in K(v=(\underline{x} = \underline{y}) \wedge \neg \exists q \in C(p \leq q \wedge E_0(q,(\underline{x} \neq \underline{y})))) \vee \\ & \vee \exists x,y \in K(v=(\underline{x} \neq \underline{y}) \wedge (\exists s \leq p \exists z \in K(\langle z,s \rangle \in y \wedge E_0(p,(\underline{z} \neq \underline{x})))) \vee \\ & \vee \exists s \leq p \exists z \in K(\langle z,s \rangle \in x \wedge E_0(p,(\underline{z} \neq \underline{y})))) \vee \\ & \vee \exists x,y \in K(v=(\underline{x} \neq \underline{y}) \wedge \neg \exists q \in C(p \leq q \wedge E_0(q,(\underline{x} \in \underline{y})))) . \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Definition ist nach 1.10 sinnvoll, da im Definieren von $E_0(p,v)$ nur R-Vorgänger von $\langle p,v \rangle$ auftreten, d.h. das Definieren läßt sich schreiben als $E(p,v, \{ \langle q,z \rangle : E_0(q,z) \wedge R(\langle q,z \rangle, \langle p,v \rangle) \})$.

Sei E_n schon definiert, dann definieren wir für $p \in C$, $v \in KA(\dot{n}+1)$

$$\begin{aligned} E_{n+1}(p,v) : & \leftrightarrow (v \in KA(\dot{n}) \wedge E_n(p,v)) \vee \\ & \vee [v \in KA(\dot{n}+1) \wedge Gr(\dot{n}+1,v) \wedge \\ & \wedge [\exists x,y \in KA(\dot{n})(v = \neg xy \wedge (E_n(p,x) \vee E_n(p,y))) \vee \\ & \vee \exists x \in KA(\dot{n})(v = \neg x \wedge \neg \exists q \in C(p \leq q \wedge E_n(q,x))) \vee \\ & \vee \exists x \in KP(\dot{n}) \exists w \in \omega (v = \exists \{ \langle 0,w,1 \rangle \} x \wedge \\ & \wedge \exists u \in K \exists z (E_n(p,z) \wedge z = Ers_K(w,u,x))]]] . \end{aligned}$$

Statt $\vdash_{ZFC} KA(\dot{n},x) \wedge p \in C \wedge E_n(p,x)$ schreiben wir auch

$$\vdash (p \Vdash_n^* x) \quad \text{oder auch} \quad \vdash (p \Vdash x) .$$

3.6 Schwache Erzwingungsrelationen

Für $p \in C$ und $x \in KA(\dot{n})$ definieren wir:

$$E_n^S(p, x) : \leftrightarrow E_{n+2}(p, \neg\neg x)$$

(die Bedingung p erzwingt die K -Aussage x schwach) .

Statt $\vdash_{ZFC} E_n^S(p, x) \wedge p \in C \wedge KA(n, x)$ schreiben wir

$\vdash (p \Vdash_n x)$ oder auch $\vdash (p \Vdash x)$, falls es der Zusammenhang erlaubt.

Die Beziehungen zwischenschwachen und starken Erzwingungsrelationen werden in 4.3 aufgezeigt.

3.7 Abkürzungen

Damit die nachfolgenden Definitionen und Beweise nicht völlig unübersichtlich werden, treffen wir die folgenden Vereinbarungen.

Ist $A(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$ eine Formel mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$, so schreiben wir für $z = \text{Sub}_K(\ulcorner A \urcorner, \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_n, x_1, \dots, x_n)$
 $z = \ulcorner A(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \urcorner$ (wobei $x_1, \dots, x_n \in K$).

Die Zeichenreihe, die aus der Gödelmenge einer Formel A entsteht, indem die "freien Variablen" durch Konstante für Elemente aus K ersetzt werden, teilen wir also mit, indem wir in der Formel A die Variablen entsprechend durch Symbole der Form $\underline{x}$ ersetzen und den entstehenden Ausdruck in Gödelisierungszeichen $\ulcorner \urcorner$ einschließen.

Insbesondere schreiben wir für $z = \text{Ers}_K(\dot{k}, x, \ulcorner A(v_k) \urcorner)$ (siehe 2.6)
 $z = \ulcorner A(v_k / \underline{x}) \urcorner$ oder, wenn der Zusammenhang klar ist, $z = \ulcorner A(\underline{x}) \urcorner$.

Die Definition in 3.5 läßt sich dann für $\ulcorner A \urcorner = \ulcorner A(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \urcorner$ mit $\text{Gr}(n+1, \ulcorner A \urcorner)$ ($n \geq 1$) auch formulieren wie folgt:

Hat A die Form $\forall B D$, so gilt: $p \Vdash_{n+1}^* \ulcorner A \urcorner \leftrightarrow p \Vdash_n^* \ulcorner B \urcorner \vee p \Vdash_n^* \ulcorner D \urcorner$;

hat A die Form $\neg B$, so gilt: $p \Vdash_{n+1}^* \ulcorner A \urcorner \leftrightarrow \neg \exists q \in C(p \leq q \wedge q \Vdash_n^* \ulcorner B \urcorner)$;

hat A die Form $\exists v_k B$ so gilt: $p \Vdash_{n+1}^* \ulcorner A \urcorner \leftrightarrow \exists x \in K(p \Vdash_n^* \ulcorner B(v_k / \underline{x}) \urcorner)$.

Als Mitteilungszeichen für Elemente aus KA gebrauchen wir in die-

sem und dem folgenden Paragraphen $a, b, c, \dots$. Sind $a, b \in KA$, so

sei $\ulcorner a \urcorner := \neg a$ (Komposition der Zeichenreihen), $\ulcorner a \vee b \urcorner := \ulcorner \forall ab \urcorner$,

$\ulcorner \exists w_k b \urcorner := \ulcorner \exists \{ \langle 0, \langle k, 1 \rangle \} b \urcorner$ (mit w_k teilen wir Nichtstandardvariable

mit, d.h. für $k \in \omega$ ist $w_k := \{\langle 0, \langle k, 1 \rangle \rangle\}$. Entsprechend verwenden wir Abkürzungen der Form $(a \rightarrow b) := \neg \neg a \wedge b$, $(a \leftrightarrow b)$, $(a \wedge b)$ und $\neg w_k b := \neg \neg \exists \neg \neg \{ \langle 0, \langle k, 1 \rangle \} b$. Ist $b \in KF$, $u \in \omega$, $x \in K$ und gilt $z = \text{Ers}_K(u, x, b)$, so schreiben wir auch $z = \neg b(w_u | x)$.

§ 4 Eigenschaften der Erzwingungsrelationen

Die grundlegenden Lemmata über den Erzwingungsbegriff sollen jetzt bewiesen werden. Ferner werden wir in einem Lemma die Zusammenhänge zwischen schwachem und starkem Forcing zusammenfassen, um spätere Berechnungen zu erleichtern.

4.1 Konsistenzlemma:

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\vdash_{ZF} \forall a (\text{Gr}(\dot{n}, a) \rightarrow \neg \exists p \in C (p \Vdash_n^* a \wedge p \Vdash_{n+1}^* \neg a)).$$

(Für $\text{Gr}(\dot{o}, a)$ und $\text{Gr}(\dot{o}, \neg a)$ gilt sogar $\neg \exists p \in C (p \Vdash_0^* a \wedge p \Vdash_0^* \neg a)$).

Beweis: Ann.: Es ex. a mit $\text{Gr}(\dot{n}, a)$ und es ex. $p \in C$ mit $p \Vdash_n^* a$ und $p \Vdash_n^* \neg a$. 1. Fall: $a = (x = y)$ mit $x, y \in K$. Aus $p \Vdash_0^* (x = y)$ folgt nach Def. 3.5: $\exists q (q \leq p \wedge q \Vdash_0^* (x \dagger y))$, ein Widerspruch zu $p \leq p$ und $p \Vdash_0^* (x \dagger y)$.

2. Fall: a habe nicht die Form wie in Fall 1. Dann folgt aus Def. 3.5 mit $p \Vdash_n^* \neg a$: $\neg \exists q (p \leq q \wedge q \Vdash_n^* a)$, ein Widerspruch zu $p \leq p$ und $p \Vdash_n^* a$.

4.2 Das folgende Lemma ist fundamental für alle folgenden Beweise:

Erweiterungslemma:

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$(i) \quad \vdash_{ZF} \forall a (\text{Gr}(\dot{n}, a) \rightarrow \forall p \in C \forall q \in C (p \Vdash_n^* a \wedge p \leq q \rightarrow q \Vdash_n^* a))$$

$$(ii) \quad \vdash_{ZF} \forall a (\text{Gr}(\dot{n}, a) \rightarrow \forall p \in C \exists q \in C (p \leq q \wedge (q \Vdash_n^* a \vee q \Vdash_{n+1}^* \neg a))).$$

(Für $\text{Gr}(\dot{o}, a)$ und $\text{Gr}(\dot{o}, \neg a)$ gilt sogar $..(q \Vdash_0^* a \vee q \Vdash_0^* \neg a))$).

Beweis von (i): durch metasprachliche Induktion über n.

I. n = 0

Wir führen den Beweis durch R_0 -Induktion (siehe 3.3). Seien also a, p, und q gegeben mit $Gr(0, a)$ ($\dot{0} = 0$); $p, q \in C$; $p \leq q$ und $p \Vdash_0^* a$. Es gelte: $R_0(b, a) \wedge p \Vdash_0^* b \rightarrow q \Vdash_0^* b$.

1. Fall: $a = (\underline{x} \in \underline{y})$ mit $x, y \in K$.

$p \Vdash_0^* a \leftrightarrow \exists z \in K \exists r \leq p (\langle z, r \rangle \in y \wedge p \Vdash_0^* (x = z))$. Seien z, r mit diesen Eigenschaften gegeben, so gilt: $(\underline{x} = \underline{z})$ ist R_0 -Vorgänger von a, also $q \Vdash_0^* (\underline{x} = \underline{z})$. Ferner gilt $r \leq q$ wegen der Transitivität von $\leq$, also gilt nach Def. 3.5: $q \Vdash_0^* a$.

2. Fall: $a = (\underline{x} = \underline{y})$ mit $x, y \in K$.

$p \Vdash_0^* a \leftrightarrow \neg \exists s (p \leq s \wedge s \Vdash_0^* (\underline{x} \neq \underline{y}))$
 $\rightarrow \neg \exists s (q \leq s \wedge s \Vdash_0^* (\underline{x} \neq \underline{y}))$ (da $p \leq q$)
 $\rightarrow q \Vdash_0^* a$.

3. Fall: $a = (\underline{x} \neq \underline{y})$: Beweis analog zu Fall 1.

4. Fall: $a = (\underline{x} \neq \underline{y})$: Beweis analog zu Fall 2.

II. Die Behauptung gelte für n. Seien a, p und q gegeben mit $p \leq q$, $Gr(\dot{n}+1, a)$ und $p \Vdash_{n+1}^* a$.

1. Fall: $a = \neg b$ mit $Gr(\dot{n}, b)$.

$p \Vdash_{n+1}^* a \leftrightarrow \neg \exists s (p \leq s \wedge s \Vdash_n^* b)$
 $\rightarrow \neg \exists s (q \leq s \wedge s \Vdash_n^* b)$
 $\rightarrow q \Vdash_{n+1}^* a$ nach Def. 3.5.

2. Fall: $a = \neg b \vee c$ mit $b, c \in KA(\dot{n})$.

$p \Vdash_{n+1}^* a \leftrightarrow p \Vdash_n^* b \vee p \Vdash_n^* c$
 $\rightarrow q \Vdash_n^* b \vee q \Vdash_n^* c$ (nach Induktionsvoraussetzung)
 $\rightarrow q \Vdash_{n+1}^* a$.

3. Fall: $a = \exists w_k b$ mit $k \in \omega$ und $KF(\dot{n}, b)$.

$$p \Vdash_{n+1}^* a \leftrightarrow \exists x \in K(p \Vdash_n^* \bar{b}(w_k/x)) \quad (\text{siehe 3.7}).$$

Es gilt: für $y \in K$ ist $\bar{b}(w_k/y) \in KA(\dot{n})$, also gilt

für ein x mit obiger Eigenschaft nach Ind.-Vor.:

$$q \Vdash_n^* \bar{b}(w_k/x), \text{ also } q \Vdash_{n+1}^* a \text{ nach Def. 3.5.}$$

Damit ist (i) vollständig bewiesen.

Beweis von (ii): Seien $p \in C$, a gegeben mit $Gr(\dot{n}, a)$.

1. Fall: $n = 0$, $a = (\underline{x} = \underline{y})$ mit $x, y \in K$. Dann gilt $Gr(\dot{0}, \bar{a})$.

$$\text{Ann.: } \neg \exists q(p \leq q \wedge q \Vdash_0^* \bar{a}), \text{ d.h. } \neg \exists q(p \leq q \wedge q \Vdash_0^* (\underline{x} \neq \underline{y})).$$

Nach Def. 3.5 folgt: $p \Vdash_0^* a$.

2. Fall: $n = 0$, $a = (\underline{x} \in \underline{y})$. Wieder gilt $Gr(\dot{0}, \bar{a})$.

$$\text{Ann.: } \neg \exists q(p \leq q \wedge q \Vdash_0^* a). \text{ Nach Def. 3.5: } p \Vdash_0^* \bar{a}.$$

3. Fall: Sei n beliebige natürliche Zahl, a nicht wie in Fall 1, 2.

$$\text{Ann.: } \neg \exists q(p \leq q \wedge q \Vdash_n^* a), \text{ so folgt nach 3.5: } p \Vdash_{n+1}^* \bar{a}.$$

Zusammen mit $Gr(\dot{n}, a) \wedge p \Vdash_n^* a \rightarrow p \Vdash_{n+1}^* a$ folgt aus Fall 1-3 die

Behauptung.

4.3 Die Zusammenhänge zwischen starken und schwachen Erzwingungsrelationen regelt das folgende Lemma. Bei den Aussagen handelt es sich immer um ein System von Aussagen der Form: für jede natürliche Zahl n ist in ZF herleitbar....; da aber für $n < m$ und $a \in KA$ mit $Gr(\dot{n}, a)$ gilt: $p \Vdash_m^* a \leftrightarrow p \Vdash_n^* a$ für alle $p \in C$, können wir uns den Index n der Relation $\Vdash_n^*$ (bzw. $\Vdash_n$) immer passend zum Grad der betrachteten K -Aussagen gewählt denken.

Lemma: Für $a, b, c \in KA$ und $p \in C$ gilt:

$$(0) \quad p \Vdash a \leftrightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* a)$$

$$(1) \quad p \Vdash a \leftrightarrow \neg \exists q \geq p (q \Vdash^* \bar{a})$$

$$(2) \quad p \Vdash^* a \rightarrow p \Vdash a$$

$$(3) \quad p \Vdash^* \bar{a} \leftrightarrow p \Vdash \bar{a} \quad (\text{falls } a \text{ nicht die Form } (\underline{x} = \underline{y}), x, y \in K \text{ hat})$$

$$(4) \quad \text{Hat } a \text{ die Form } \bar{b} \wedge \bar{c}, \bar{b} \leftrightarrow \bar{c}, \bar{\forall w_k d} \quad (\text{wobei } d \in KF,$$

$k \in \omega$ und $\ulcorner d(w_k/x) \urcorner \in KA$ für alle $x \in K$), so gilt:

$$p \Vdash^* a \leftrightarrow p \Vdash a$$

$$(5) \quad p \Vdash \ulcorner a \wedge b \urcorner \leftrightarrow p \Vdash a \wedge p \Vdash b$$

(6) Ist $d \in KF$, $k \in \omega$ und $\ulcorner d(w_k/x) \urcorner \in KA$ für alle $x \in K$, so gilt: $p \Vdash \ulcorner \forall w_k d \urcorner \leftrightarrow \forall x \in K (p \Vdash \ulcorner d(w_k/x) \urcorner)$.

$$(7) \quad p \Vdash a \rightarrow p \Vdash \ulcorner a \vee b \urcorner.$$

Beweis: (0) und (1) ergeben sich direkt aus der Definition von $\Vdash^*$ bzw. $\Vdash$ in 3.5 bzw. 3.6.

Zu (2): Beweis mit Hilfe von (0): gelte also $q \geq p$ und $p \Vdash^* a$.

Nach dem Erweiterungslemma 4.2 folgt $q \Vdash^* a$. Da $q \geq p$, gilt $\forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* a)$.

Zu (3): Nach (2) bleibt zu zeigen: $p \Vdash \ulcorner \neg a \urcorner \rightarrow p \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner$.

Ann.: $p \Vdash \ulcorner \neg a \urcorner$ und nicht $p \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner$. Nach Definition von $p \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner$ ex. $q \geq p$ mit $q \Vdash^* a$. Mit (0) und $p \Vdash \ulcorner \neg a \urcorner$ folgt: es ex. $r \geq q$ mit $r \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner$. Nach 4.2 folgt mit $q \Vdash^* a$: $r \Vdash^* a$, ein Widerspruch zum Konsistenzlemma 4.1.

Zu (4): Da $\ulcorner b \wedge c \urcorner$, $\ulcorner b \leftrightarrow c \urcorner$, $\ulcorner \forall w_k d \urcorner$ Abkürzungen für K-Aussagen der Form $\ulcorner \neg e \urcorner$ sind, folgt (4) aus (3).

$$\begin{aligned} \text{Zu (5): } p \Vdash \ulcorner a \wedge b \urcorner &\leftrightarrow p \Vdash^* \ulcorner a \wedge b \urcorner && (\text{ nach (4) }) \\ &\leftrightarrow p \Vdash^* \ulcorner \neg(\neg a \vee \neg b) \urcorner && (\text{ Def. von } \wedge) \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg q \Vdash^* \ulcorner \neg a \vee \neg b \urcorner) && (\text{ Def. 3.5 }) \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg(q \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner \vee q \Vdash^* \ulcorner \neg b \urcorner)) && \text{,,} \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg(q \Vdash^* \ulcorner \neg a \urcorner) \wedge \neg(q \Vdash^* \ulcorner \neg b \urcorner)) \\ &\leftrightarrow p \Vdash a \wedge p \Vdash b && (\text{ nach (1) }). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zu (6): } p \Vdash \ulcorner \forall w_k d \urcorner &\leftrightarrow p \Vdash^* \ulcorner \exists w_k (\neg d) \urcorner && (\text{ nach (4) und Def. von } \forall) \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg(q \Vdash^* \ulcorner \exists w_k (\neg d) \urcorner)) \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg \exists x \in K (q \Vdash^* \ulcorner \neg d(w_k/x) \urcorner)) \\ &\leftrightarrow \forall q \geq p (\neg \exists x \in K (\forall r \geq q (\neg(r \Vdash^* \ulcorner d(w_k/x) \urcorner)))) \\ &\leftrightarrow \forall x \in K \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner d(w_k/x) \urcorner) \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \forall x \in K(p \Vdash \neg d(w_k/\underline{x})) \quad (\text{nach (1)}).$$

Zu (7): Sei $q \geq p$. Nach (o) und Vor. ex. $r \geq q$ mit $r \Vdash^* a$. $r \Vdash^* \neg a \vee b$
nach Def. 3.5. Also mit (o): $p \Vdash^* \neg a \vee b$.

4.4 Lemma: Seien $a, b \in KA$, $p \in C$. Dann gilt:

- (i) $p \Vdash^* \neg a \wedge b \rightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* a \wedge r \Vdash^* b)$
- (ii) $p \Vdash^* \neg a \wedge b \rightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* a \wedge r \Vdash^* b)$
- (iii) $p \Vdash^* a \wedge p \Vdash^* b \rightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* \neg a \wedge b)$
- (iv) $p \Vdash^* \neg a \vee b \rightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* a \vee r \Vdash^* b)$

Beweis: Zu (i): Nach 4.3 (2), (5) folgt aus der Vor.: $p \Vdash a$ und $p \Vdash b$. Sei $q \geq p$. Nach Def. von $\Vdash$ ex. $s \geq q$ mit $s \Vdash^* a$, ebenso ex. $r \geq s$ mit $r \Vdash^* b$. Nach 4.2 gilt: $r \Vdash^* a$ und $r \Vdash^* b$.

Zu (ii): Der Beweis folgt aus (i) mit 4.3 (4).

Zu (iii): Aus der Vor. folgt mit 4.3 (2), (5): $p \Vdash^* \neg a \wedge b$. Mit 4.3 (o) folgt die Behauptung.

Zu (iv): Mit 4.3 (o) und Def. 3.5 ergibt sich sofort die Beh..

4.5 Das folgende Lemma wird bei fast allen Beweisen in Kapitel 2 und Kapitel 3 verwendet:

Lemma: Seien $a, b \in KA$ und gelte $Gr(n, \neg a \vee b)$. Dann gilt:

$$\forall r \in C(r \Vdash_n^* a \rightarrow \exists s \geq r (s \Vdash_n^* b)) \rightarrow \forall p \in C(p \Vdash_n^* \neg a \vee b).$$

Beweis: Sei $p \in C$ und $p \leq q$. Nach dem Erweiterungslemma 4.2 gibt

es $r \in C$, $r \geq q$ mit $r \Vdash_n^* a$ oder $r \Vdash_n^* \neg a$. Falls $r \Vdash_n^* \neg a$, so gilt nach Def. 3.5 und der Vor. über den Grad von $\neg a \vee b$:

$r \Vdash_n^* \neg a \vee b$. Falls $r \Vdash_n^* a$, so gilt nach Vor.: es gibt $s \in C$, $r \leq s$ mit $s \Vdash_n^* b$, also mit derselben Begründung wie vorher:

$s \Vdash_n^* \neg a \vee b$. Insgesamt folgt: $\forall q \geq p \exists t \geq q (t \Vdash_n^* \neg a \vee b)$, d.h.

$p \Vdash_n^* \neg a \vee b$.

4.6 Führen wir eine geeignete Gödelisierung der Theorie ZF in der elementaren Zahlentheorie durch (vergleiche auch 5.5), so zeigen die Beweise zu Lemma 4.2 (1): Es gibt eine primitiv-rekursive Funktion, die zur Gödelnummer einer ZF-Formel $A(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$ mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ ($n \geq 0$) die Gödelnummer eines Beweises in ZF der Formel

$$\forall x_1 \in K \dots \forall x_n \in K \forall p \in C \forall q \in C (p \Vdash_m^* \overline{A(x_1, \dots, x_n)} \wedge p \leq q \rightarrow q \Vdash_m^* \overline{A(x_1, \dots, x_n)})$$

(wobei $m = Rg^*(A)$, siehe 5.1) liefert.

Dasselbe gilt damit auch für die Lemmata in 4.3 und 4.4, ferner für Lemma 5.3 (6) (s.u.).

Die häufige Anwendung dieser Lemmata kan also so aufgefaßt werden, daß wir zur Gödelnummer der jeweils betrachteten Formel in primitiv-rekursiver Weise die Gödelnummer eines Beweises in ZF des entsprechenden Allabschlusses des jeweils zitierten Lemmas (formuliert für diese Formel) erhalten.

§ 5 Erzwingung der logischen Axiome und Regeln

5.1 Ist A eine ZF-Formel, so sei $Rg^*(A) := 0$, falls A atomar oder Negation einer atomaren Formel ist, $Rg^*(A) := Rg(A)$ sonst.

Ist A eine ZF-Formel mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ und gilt $Rg^*(A) = m$, so erweitern wir den Begriff der Erzwingungsrelation durch die folgende Definition:

Def.: $E'_m(p, \ulcorner A \urcorner) := \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n (x_1, \dots, x_n \in K \rightarrow E_m(p, \ulcorner A(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \urcorner))$.
(wobei natürlich $\underline{x}_1$ die Konstante $\underline{x}_1$ bedeutet usw.)

Wir schreiben statt $E'_m(p, \ulcorner A \urcorner)$ auch wieder $p \Vdash_m^* \ulcorner A \urcorner$ (bzw. $p \Vdash_m \ulcorner A \urcorner$ für $\forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash_m^* \ulcorner A \urcorner)$).

Bemerkung: Für $n = 0$ stimmt diese Definition mit unserer bisherigen überein.

5.2 Lemma 1: Ist A eine geschlossene ZF-Formel mit $Rg^*(A) = m$, so gilt: $\vdash_{ZF} \forall p \in C(p \Vdash_{m+2} \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner)$.

Beweis: $p \Vdash^* \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner \leftrightarrow \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner)$.

Sei $q \geq p$. Ann.: $\neg q \Vdash^* \ulcorner A \urcorner$. Da A geschlossene Formel ist, gilt $Rg(A) > 0$. Nach Def. 3.5 folgt: $\exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner A \urcorner)$ und damit $\exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner)$. Falls $q \Vdash^* \ulcorner A \urcorner$ gilt, so auch $q \Vdash^* \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner$, also auch $\exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner A \vee \bar{A} \urcorner)$.

Lemma 2: Ist A eine ZF-Formel mit $Rg^*(A) = m$, so gilt:

$\vdash_{ZF} \forall p \in C(p \Vdash_{m+3} \ulcorner A(v_0) \urcorner \rightarrow \exists v_0 \bar{A})$.

Beweis: O.w.E. sei v_0 einzige freie Variable in $A(v_0)$.

Sei $p \in C$. $p \Vdash \ulcorner A(v_0) \urcorner \rightarrow \exists v_0 \bar{A} \leftrightarrow \forall x \in K (p \Vdash \ulcorner A(v_0/\underline{x}) \urcorner \rightarrow \exists v_0 \bar{A})$
 $\leftrightarrow \forall x \in K \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash^* \ulcorner A(v_0/\underline{x}) \urcorner \vee r \Vdash^* \exists v_0 \bar{A})$.

Sei $x \in K$, $q \geq p$.

Nach 4.2 (ii) (wo keine metasprachliche Induktion beim Beweis verwendet wurde) und wegen $\ulcorner A(v_0/\underline{x}) \urcorner \in KA(\hat{m})$

existiert $r \Vdash^* \neg A(v_0/x)$ oder $r \Vdash^* A(v_0/x)$. Im ersten Fall sind wir nach Def. 3.5 fertig, im zweiten folgt $r \Vdash^* \exists v_0 A$, also ebenfalls die Behauptung.

Bemerkung: Die Beweise zu Lemma 1 und Lemma 2 zeigen: wir können eine primitiv-rekursive Funktion angeben, die angewandt auf die Gödelnummer eines der dort betrachteten Axiome B uns die Gödelnummer eines Beweises einer Formel der Form $\forall p \in C(p \Vdash_n B)$ liefert. Wenn wir im Folgenden sagen: "Zu dem Beweis $\mathcal{B}$ können wir in prim.-rek. Weise einen Beweis $\mathcal{B}_1$ angeben", so meinen wir: es gibt eine prim.-rek. Funktion f, die uns zu jeder Gödelnummer a eines Beweises $\mathcal{B}$ dieser Art die Gödelnummer f(a) des entsprechenden Beweises $\mathcal{B}_1$ liefert.

Lemma 3: Ist D Konklusion der Regel $A \vdash B \vee A$ und ist ein Beweis $\mathcal{B}$ der Formel $\forall p \in C(p \Vdash_m A)$ gegeben, so können wir in primitiv-rekursiver Weise zu $\mathcal{B}$ einen Beweis $\mathcal{B}_1$ der Formel $\forall p \in C(p \Vdash_n B)$ angeben (wobei $n := \max(m, Rg^*(B)) + 1$).

Beweis: O.w.E. seien A und B geschlossene Formeln. Dann gilt $Gr(\neg A \vee B) \leq n$. Ist $p \in C$, so erhalten wir aus $\mathcal{B}$ wegen $m \leq n$ mit $p \Vdash_m^* A$; $p \Vdash_m^* B \vee A$ (nach Def. 3.5); $p \Vdash B \vee A$ (nach 4.3) unseren gewünschten Beweis $\mathcal{B}_1$.

Lemma 4: Ist D Konklusion der Regel $B_1, B_2 \vdash D$ (die kein Fall der Regel aus Lemma 3 sei) und haben wir Beweise $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ für $\forall p \in C(p \Vdash_m B_1)$, $\forall p \in C(p \Vdash_m B_2)$ vorliegen, so können wir in prim.-rek. Weise einen Beweis $\mathcal{B}$ für die Formel $\forall p \in C(p \Vdash_n D)$ angeben (wobei $n := \max(m, m') + 1$ ist).

Beweis: 1. Fall: Für die Regeln $A \vee A \vdash A$ und

$(A \vee B) \vee E \vdash A \vee (B \vee E)$ ergibt sich die Behauptung sofort aus der Definition von $\Vdash_n^*$.

2. Fall: Sei $B_1, B_2 \vdash D$ ein Fall der Schnittregel von der Form $E \vee A, \neg E \vee B \vdash A \vee B$. O.w.E. seien A, B und E geschlossene Formeln. Sei $q \geq p$. Aus $\mathcal{Z}_1$ erhalten wir $r \geq q$ mit

$r \Vdash_n^* \neg E \vee A$. Ebenso erhalten wir aus $\mathcal{Z}_2$ $s \geq r$ mit

$s \Vdash_n^* \neg E \vee B$. Fügen wir einen speziellen Beweis von 4.2 (i) für die K-Aussage $\neg E \vee A$ hinzu, so erhalten wir $s \Vdash_n^* \neg E \vee A$.

Falls $s \Vdash_n^* A$ oder $s \Vdash_n^* B$, sind wir fertig. Der Fall

$s \Vdash_n^* \neg E$ und $s \Vdash_n^* \neg E$ liefert mit dem Konsistenzlemma 4.1

den Beweis eines Widerspruchs. Insgesamt folgt die Beh.

für Fall 2.

3. Fall: Sei $B_1, B_2 \vdash D$ ein Fall der $\exists$ -Einführung der

Form $A \rightarrow B \vdash \exists v_0 A \rightarrow B$, wobei v_0 nicht frei in B ist.

O.w.E. sei v_0 die einzige freie Variable in A.

Sei $p \in C$. Nach Vor. und Def. 5.1 ist $\mathcal{Z}_1$ ein Beweis für

$\forall x \in K \forall q \geq p \exists r \geq q (r \Vdash_m^* \neg A(v_0/x) \vee r \Vdash_m^* B)$.

Ann.: $\neg(p \Vdash_{m+1}^* \exists v_0 A \rightarrow B)$, dann gilt:

(*) $\exists q \geq p \forall t \geq q (\neg(t \Vdash_{m+1}^* \exists v_0 A \vee B))$.

D.h. insbesondere: $\neg(q \Vdash_{m+1}^* \neg \exists v_0 A)$. Mit Def. 3.5 folgt:

es gibt $s \geq q$ mit $s \Vdash_{m+1}^* \exists v_0 A$, also ex. $x_0 \in K$ mit

$s \Vdash_m^* A(v_0/x_0)$. Zu x_0 , s gibt es wegen $s \geq p$ und der Vor.

ein $r \geq s$ mit $r \Vdash_m^* \neg A(v_0/x_0)$ oder $r \Vdash_m^* B$.

Fügen wir einen speziellen Beweis von 4.2 (i) für $\neg A(v_0/x_0)$

hinzu, so erhalten wir mit $r \geq s$: $r \Vdash_m^* \neg A(v_0/x_0)$, also folgt

mit 4.1: $r \Vdash_m^* B$. Da $r \geq q$, ist dies ein Widerspruch zu (*).

Wir erhalten also aus der Annahme und $\mathcal{Z}_1$ den Beweis eines

Widerspruchs. Damit folgt die Beh. für Fall 3.

5.3 Lemma: Für alle $p \in C$ und alle $u, v, w, u', v' \in K$ gilt:

- (1) $p \Vdash_0^* (u = u)$
- (2) $p \Vdash_0^* (u = v) \rightarrow p \Vdash_0^* (v = u)$
- (3) $p \Vdash_0^* (u = v) \wedge p \Vdash_0^* (v = w) \rightarrow p \Vdash_0^* (u = w)$
- (4) $p \Vdash_0^* (u = u') \wedge p \Vdash_0^* (u \in v) \rightarrow p \Vdash_0^* (u' \in v)$
- (5) $p \Vdash_0^* (v = v') \wedge p \Vdash_0^* (u \in v) \rightarrow p \Vdash_0^* (u \in v')$
- (6) Sei $A(v_0)$ eine ZF-Formel, $\overline{A(u)} := \overline{A(v_0/u)}$, ferner gelte $\text{Gr}(\dot{n}, \overline{A(u)})$, dann gilt:

$$p \Vdash_n^* (u = v) \wedge p \Vdash_n^* \overline{A(u)} \rightarrow p \Vdash_n^* \overline{A(v)}$$

(Gemeint ist: die entsprechenden Allabschlüsse der Formeln
 (1) - (6) sind in ZF herleitbar) .

Beweis: Zu (1): Durch Induktion nach der fundierten Relation $\in_C$ (siehe 3.2). Wir setzen also voraus:

$\forall t \in C \ \forall x \in K (x \in_C u \rightarrow t \Vdash_0^* (x = x))$. Sei $p \in C$.

$$\begin{aligned} p \Vdash^* (u = u) &\leftrightarrow \neg \exists q \geq p (q \Vdash^* (u \neq u)) \\ &\leftrightarrow \neg \exists q \geq p \exists r \in C \exists x \in K (r \leq q \wedge \langle x, r \rangle \in u \wedge q \Vdash^* (x \neq u)) \\ &\leftrightarrow \neg \exists q \geq p \exists r \leq q \exists x \in K (\langle x, r \rangle \in u \wedge \forall s \geq q (\neg (s \Vdash^* (x \in u)))) \\ \forall s \geq q (\neg (s \Vdash^* (x \in u))) &\leftrightarrow \forall s \geq q (\neg (\exists y \in K \exists s' \leq s (\langle y, s' \rangle \in u \wedge \\ &\quad \wedge s \Vdash^* (x = y))))). \end{aligned}$$

Nennen wir die letzte Formel $B_1(u, q)$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} p \Vdash^* (u = u) &\leftrightarrow \neg \exists q \geq p \exists r \leq q \exists x \in K (\langle x, r \rangle \in u \wedge B_1(u, q)) \\ &\leftrightarrow \neg B_2(u, p). \end{aligned}$$

Ann.: $\neg (p \Vdash^* (u = u))$. Also gilt $B_2(u, p)$. Mit den Bezeich-

nungen in B_2 folgt aber: $x \in_C u$, da $\langle x, r \rangle \in u$. Also gilt nach

Ind.-Vor.: $q \Vdash^* (x = x)$. Es folgt: $q \geq q$, $x \in K$, $r \leq q$, $\langle x, r \rangle \in u$,
 $q \Vdash^* (x = x)$, d.h. $\exists s \geq q \exists y \in K \exists s' \leq s (\langle y, s' \rangle \in u \wedge s \Vdash^* (x = y))$.

Das ist gerade $\neg B_1(u, q)$, also ein Widerspruch.

Zu (2): $p \Vdash^*(u = v) \leftrightarrow \neg \exists q \geq p (q \Vdash^*(u \neq v))$.

Die Definition von $q \Vdash^*(u \neq v)$ ist symmetrisch in u und v .

Zu (3): Beweis durch Induktion nach $\in_C$, d.h. die Ind.-Vor.

lautet: $\forall t \in C \forall x, y, z \in K (x \in_C u \wedge y \in_C v \wedge z \in_C w \rightarrow$

$$\rightarrow (t \Vdash^*(x = y) \wedge t \Vdash^*(y = z) \rightarrow t \Vdash^*(x = z))).$$

Ann.: $\neg (p \Vdash^*(u = v))$, d.h. $\exists q \geq p (q \Vdash^*(u \neq v))$, also o.w.E.:

es gibt $x \in K$, $r \leq q$ mit $\langle x, r \rangle \in u$ und $q \Vdash^*(x \neq v)$ nach Def. 3.5.

Da $q \geq p$ und $p \Vdash^*(u = v)$, gilt $\neg (q \Vdash^*(x \neq v))$ (sonst würde mit $\langle x, r \rangle \in u$ gelten: $\exists q \geq p (q \Vdash^*(u \neq v))$, d.h. $\neg (p \Vdash^*(u = v))$).

Es folgt: es gibt $s \geq q$ mit $s \Vdash^*(x \in v)$, also gibt es $r' \leq s$, $y \in K$ mit $\langle y, s' \rangle \in v$ und $s \Vdash^*(x = y)$. Da $s \geq p$ und $p \Vdash^*(v = u)$, gilt analog zu obiger Begründung: $\neg (s \Vdash^*(y \neq u))$. Also gibt

es $t \geq s$, $t' \leq t$, $z \in K$ mit $\langle z, t' \rangle \in w$ & $t \Vdash^*(y = z)$. Mit 4.2 (4.2 (1) für den Fall $n = 0$) folgt: $t \Vdash^*(x = y)$ und $t \Vdash^*(y = z)$, also nach Ind.-Vor. wegen $\langle x, r \rangle \in u$, $\langle y, s' \rangle \in v$ und $\langle z, t' \rangle \in w$: $t \Vdash^*(x = z)$. Mit $t' \leq t$, $\langle z, t' \rangle \in w$, $t \Vdash^*(x = z)$ folgt $t \Vdash^*(x \in w)$. Nach 4.2 gilt aber wegen $t \geq q$ und $q \Vdash^*(x \neq v)$: $t \Vdash^*(x \neq v)$, ein Widerspruch zu 4.1.

Zu (4): $p \Vdash^*(u \in v) \leftrightarrow \exists r \leq p \exists x \in K (\langle x, r \rangle \in v \wedge p \Vdash^*(u = x))$.

Nach (3) gilt mit $p \Vdash^*(u = u')$ unter Verwendung von (2):

$p \Vdash^*(u' = x)$, also auch $p \Vdash^*(u' \in v)$.

Zu (5): $p \Vdash^*(u \in v)$ impliziert: es gibt $r \leq p$, $x \in K$ mit $\langle x, r \rangle \in v$ und $p \Vdash^*(u = x)$. Zu zeigen: $\forall q \geq p \exists q' \geq q (q' \Vdash^*(u \in v'))$.

Wegen $p \Vdash^*(v = v')$ gilt: $\neg \exists s \geq p (s \Vdash^*(v \neq v'))$. Daraus folgt insbesondere nach Def. 3.5: $\forall s \geq p (\neg (\exists y \in K \exists t \leq s (\langle y, t \rangle \in v \wedge s \Vdash^*(y \neq v'))))$.

Sei $q \geq p$. Da $r \leq p$, gilt $r \leq q$. Ferner ist $\langle x, r \rangle \in v$, also

folgt mit $p \Vdash^*(\underline{v} = \underline{v}')$: $\neg(q \Vdash^*(\underline{x} \neq \underline{v}'))$, d.h. es gibt $q' \geq q$ mit $q' \Vdash^*(\underline{x} = \underline{v}')$. Da $p \Vdash^*(\underline{u} = \underline{x})$ und $q' \geq p$, gilt $q' \Vdash^*(\underline{u} = \underline{x})$ und damit nach (4): $q' \Vdash^*(\underline{u} = \underline{v}')$.

Zu (6): Beweis durch metasprachliche Induktion nach n .

I. Es sei $n = 0$, $p \in C$ erfülle die Voraussetzungen in (6).

I.1 Hat $\overline{A(\underline{u})}$ die Form $(\underline{x} \in \underline{u})$, $(\underline{u} \in \underline{x})$, $(\underline{x} = \underline{u})$, $(\underline{u} = \underline{x})$, $(\underline{u} \in \underline{u})$ oder $(\underline{u} = \underline{u})$ für ein $x \in K$, so folgt die Beh. nach (1) - (5). Tritt $\underline{u}$ in $\overline{A(\underline{u})}$ nicht auf, so ist nichts zu zeigen.

I.2 $\overline{A(\underline{u})} = (\underline{u} \neq \underline{u})$.

Da nach (1) gilt: $p \Vdash^*(\underline{u} = \underline{u})$, folgt aus $p \Vdash^*(\underline{u} \neq \underline{u})$ mit 4.1 auch $p \Vdash^*(\underline{v} \neq \underline{v})$.

I.3 $\overline{A(\underline{u})} = (\underline{u} \neq \underline{u})$

Ann.: $\neg(p \Vdash^*(\underline{v} \neq \underline{v}))$, so ex. $q \geq p$ mit $q \Vdash^*(\underline{v} = \underline{v})$. Nach (4) folgt mit $p \Vdash^*(\underline{u} = \underline{v})$: $q \Vdash^*(\underline{u} = \underline{v})$, nach (5): $q \Vdash^*(\underline{u} \in \underline{u})$, also ex. ein $r \geq q$ mit $r \Vdash^*(\underline{u} \in \underline{u})$. Dies ist mit $r \geq p$ und 4.2 ein Widerspruch zu $p \Vdash^*(\underline{u} \neq \underline{u})$.

I.4 $\overline{A(\underline{u})} = (\underline{x} \neq \underline{u})$ bzw. $\overline{A(\underline{u})} = (\underline{u} \neq \underline{x})$ für $x \in K$.

Der Beweis erfolgt analog zu I.3.

I.5 $\overline{A(\underline{u})} = (\underline{x} \neq \underline{u})$

Der Beweis erfolgt mit der Def. von $p \Vdash^*(\underline{x} \neq \underline{y})$:

Ann.: $\neg(p \Vdash^*(\underline{x} \neq \underline{y}))$. Dann ex. $q \geq p$ mit: $\neg \exists r \geq q (r \Vdash^*(\underline{x} \neq \underline{y}))$.

Nach 4.2 und 4.1 gibt es zu $q \geq q$ mit $t \Vdash^*(\underline{x} = \underline{y})$.

Aus (3) und der Vor. folgt mit 4.2: $t \Vdash^*(\underline{x} = \underline{u})$, ein Widerspruch zu $p \Vdash^*(\underline{x} \neq \underline{u})$ und $t \geq p$.

II. Die Beh. gelte für $n > 0$, $p \in C$ erfülle die Vor. von (6),

ferner gelte $\text{Gr}(\hat{n+1}, \overline{A(\underline{u})})$.

II.1 $\overline{A(\underline{u})} = \neg B(\underline{u})$

Ann.: $\neg(p \Vdash^* \neg B(\underline{v}))$, so folgt wie in I.5: es gibt $q \geq p$,

$s \geq q$ mit $s \Vdash_n^* \overline{B(\underline{v})}$. Nach Vor. und 4.2 gilt: $s \Vdash_n^* (\underline{u} = \underline{v})$, also nach Ind.-Vor.: $s \Vdash_n^* \overline{B(\underline{u})}$. Dann ex. $t \geq s$ mit $t \Vdash_n^* \overline{B(\underline{u})}$, was mit 4.1, 4.2 und $t \geq p$ ein Widerspruch zu $p \Vdash_{n+1}^* \neg \overline{B(\underline{u})}$ ist.

$$\text{II.2 } \overline{A(\underline{u})} = \overline{B(\underline{u}) \vee D(\underline{u})}$$

$$\begin{aligned} p \Vdash_{n+1}^* \overline{A(\underline{u})} &\leftrightarrow p \Vdash_n^* \overline{B(\underline{u})} \vee p \Vdash_n^* \overline{D(\underline{u})} \\ &\rightarrow p \Vdash_n^* \overline{B(\underline{v})} \vee p \Vdash_n^* \overline{D(\underline{v})} \quad (\text{nach Ind.-Vor.}) . \end{aligned}$$

O.w.E. gelte $p \Vdash_n^* \overline{B(\underline{v})}$. Zu $q \geq p$ ex. dann $r \geq q$ mit $r \Vdash_n^* \overline{B(\underline{v})}$, also auch $r \Vdash_{n+1}^* \overline{B(\underline{v}) \vee D(\underline{v})}$. Es folgt $p \Vdash_{n+1}^* \overline{A(\underline{v})}$.

$$\text{II.3 } \overline{A(\underline{u})} = \overline{\exists v_1 B(v_1, \underline{u})}$$

$$\begin{aligned} p \Vdash_{n+1}^* \overline{A(\underline{u})} &\leftrightarrow \exists x \in K(p \Vdash_n^* \overline{B(v_1/\underline{x}, \underline{u})}) \\ &\rightarrow \exists x \in K(p \Vdash_n^* \overline{B(v_1/\underline{x}, \underline{v})}) \quad (\text{nach Ind.-Vor.}) . \end{aligned}$$

Zu $q \geq p$ ex. dann $r \geq q$ mit $r \Vdash_n^* \overline{B(v_1/\underline{x}, \underline{v})}$, also $r \Vdash_{n+1}^* \overline{\exists v_1 B(v_1, \underline{v})}$, damit gilt $p \Vdash_{n+1}^* \overline{A(\underline{v})}$.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

5.4 Lemma 1: Seien $u, v \in K$. Dann gilt:

$$(i) \ u \in_C v \rightarrow \exists p \in C(p \Vdash_0^* (\underline{u} \in \underline{v}))$$

$$(ii) \ \forall q \in C(\langle u, q \rangle \in v \rightarrow q \Vdash_0^* (\underline{u} \in \underline{v}))$$

$$(iii) \ \forall p, q \in C(\langle u, p \rangle \in v \wedge p \leq q \rightarrow q \Vdash_0^* (\underline{u} \in \underline{v})) .$$

Beweis: Zu (i): Aus $u \in_C v$ folgt: es gibt $p \in C$ mit $\langle u, p \rangle \in v$.

Es gilt: $p \leq p$, $\langle u, p \rangle \in v$ und $p \Vdash_0^* (\underline{u} = \underline{u})$ nach 5.3, also

$\exists x \in K \exists r \leq p (\langle x, r \rangle \in v \wedge p \Vdash_0^* (\underline{u} = \underline{x}))$, d.h. $p \Vdash_0^* (\underline{u} \in \underline{v})$.

Zu (ii): siehe Beweis von (i).

Zu (iii): Die Beh. folgt aus (ii) mit 4.2 .

Das folgende Lemma wird uns später garantieren, daß die Klassen-terme, die wir bei zu erzwingenden Existenzaussagen angeben, Elemente aus V sind:

Lemma 2: $\forall p \in C \ \forall u, v \in K (p \Vdash_0^* (\underline{u} \in \underline{v}) \rightarrow \exists x \in K (x \in_C v \wedge p \Vdash_0^* (\underline{x} \in \underline{v}) \wedge p \Vdash_0^* (\underline{x} = \underline{u})))$.

Beweis: Seien $p \in C$, $u, v \in K$, $p \Vdash_0^* (u \in v)$. Dann gibt es $x \in K$, $r \leq p$ mit $\langle x, r \rangle \in v$ und $p \Vdash_0^* (u = x)$. Nach Lemma 1 folgt $p \Vdash_0^* (x \in v)$, ferner gilt $x \in_C v$.

Lemma 3: $\forall x, y \in K (x \subseteq y \rightarrow \forall p \in C (p \Vdash \overline{\forall v_0 (v_0 \in x \rightarrow v_0 \in y)}))$

Beweis: Mit Hilfe von 4.5. Seien $x, y \in K$, $x \subseteq y$, $p \in C$.

Sei $z \in K$, $r \in C$ mit $r \Vdash_0^* (z \in x)$. Dann gibt es $r' \leq r$, $z' \in K$ mit $\langle z', r' \rangle \in x$ und $r \Vdash_0^* (z = z')$. Also $\langle z', r' \rangle \in y$ und nach Lemma 1: $r \Vdash_0^* (z' \in y)$, nach 5.3: $r \Vdash_0^* (z \in y)$. Es folgt: für alle $z \in K$ gilt: $p \Vdash \overline{z \in x \rightarrow z \in y}$, damit ergibt sich mit 4.3 die Beh..

5.5 Als Folgerung aus 5.2 und 5.3 ergibt sich folgendes

Theorem: Es gibt eine primitiv-rekursive Funktion f , die jeder Gödelnummer einer Herleitung einer geschlossenen Formel D , in der kein mengentheoretisches Axiom auftritt, die Gödelnummer einer Herleitung einer Formel der Form $\forall p \in C (p \Vdash_m \overline{D})$ (m natürliche Zahl) in ZF zuordnet.

Beweis: Wir beschreiben die Arbeitsweise von f . Sei $B_1, \dots, B_n$ ($n \geq 1$, $B_n \equiv D$) eine Herleitung von D . Man erhält eine Herleitung der gewünschten Art wie folgt: Für jedes B_i ($1 \leq i \leq n$), das ein logisches Axiom ist, findet man eine Herleitung von $\forall p \in C (p \Vdash_m \overline{B_i})$ nach 5.2, Lemma 1 und 2. Ist B_i ein Gleichheitsaxiom, so finden wir eine Herleitung von $\forall p \in C (p \Vdash_m \overline{B_i})$ nach 5.3, (1) - (5) (mit $m \leq 6$). Ist B_j Konklusion einer Regel $B_i \vdash B \vee B_i$ ($i < j$), so hat man nach Ind.-Vor. eine Herleitung von $\forall p \in C (p \Vdash_m \overline{B_i})$ und damit nach 5.2, Lemma 3, eine Herleitung von $\forall p \in C (p \Vdash_n \overline{B_j})$ mit $n = \max(Rg^*(B), m) + 1$. Ist B_k Konklusion eines anderen Schlusses der Form $B_i, B_j \vdash B_k$

und sind nach Ind.-Vor. Herleitungen für $\forall p \in C(p \parallel_m^{\lceil B_1 \rceil})$ und für $\forall p \in C(p \parallel_m^{\lceil B_j \rceil})$ gegeben, so erhält man nach 5.2, Lemma 4, eine Herleitung für $\forall p \in C(p \parallel_n^{\lceil B_k \rceil})$ mit $n = \max(m, m') + 1$.
Damit ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung: Wir definieren in der Zahlentheorie:

Für eine Theorie T sei $\text{Bew}(T)$ die Menge der Gödelnummern von Beweisen in T ; sind $a_0, \dots, a_{n-1}$ natürliche Zahlen, so sei $a := \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$ die Sequenznummer des n -tupels $a_0, \dots, a_{n-1}$; ferner sei $(a)_i := a_i$ für $i < n$, $\text{lh}(a) := n$ (siehe [20], S.115f).
 $\ulcorner \neg \urcorner$ bezeichne die Gödelnummer einer Formel von T , v_0 sei die erste Variable von T .

Def.: $\text{Consis}(T) := \neg \exists x \in \text{Bew}(T) ((x)_{\text{lh}(x)} = \ulcorner \exists v_0 (v_0 = v_0 \wedge v_0 \uparrow v_0) \urcorner)$.

P sei das System der Peano-Arithmetik aus [20], S.204. Nach [20], S.204ff sind primitiv-rekursive Funktionen f in rekursive Erweiterungen P' von P einführbar. Das bedeutet, daß jeder Beweis für Eigenschaften von f , der mit Mitteln der elementaren Zahlentheorie informal geführt werden kann, in P' formal darstellbar ist. Falls man also eine primitiv-rekursive Funktion f angeben kann, für die man mit elementaren zahlentheoretischen Mitteln zeigen kann, daß sie angewandt auf die Gödelnummer eines Widerspruchsbeweises in einer Theorie T' die Gödelnummer eines Widerspruchsbeweises in T liefert, dann ist in einer zu f gehörigen rekursiven Erweiterung P_f von P Folgendes beweisbar:
Sei $b := \ulcorner \exists v_0 (v_0 = v_0 \wedge v_0 \uparrow v_0) \urcorner$.

$\vdash_{P_f} x \in \text{Bew}(T') \wedge (x)_{\text{lh}(x)} = b \rightarrow f(x) \in \text{Bew}(T) \wedge (f(x))_{\text{lh}(f(x))} = b$

Damit folgt:

$\vdash_{P_f} x \in \text{Bew}(T') \wedge (x)_{\text{lh}(x)} = b \rightarrow \exists y (y \in \text{Bew}(T) \wedge (y)_{\text{lh}(y)} = b)$.

Da P_f konservative Erweiterung von P ist, folgt:

$$\begin{aligned} & \vdash x \in \text{Bew}(T') \wedge (x)_{lh(x)} = b \rightarrow \exists y(y \in \text{Bew}(T) \wedge (y)_{lh(y)} = b) \\ & \vdash \exists x(x \in \text{Bew}(T') \wedge (x)_{lh(x)} = b) \rightarrow \exists y(y \in \text{Bew}(T) \wedge (y)_{lh(y)} = b) . \end{aligned}$$

Durch Kontraposition folgt:

$$\vdash \text{Consis}(T) \rightarrow \text{Consis}(T') .$$

5.6 Wir können nun das in der Einleitung angedeutete Ziel präzisieren. Sei T eine Theorie in der Sprache von ZF. Können wir $(C, \leq)$ und $K(v_0)$ so angeben, daß eine primitiv-rekursive Funktion uns zu jeder Gödelnummer eines Axioms A von T die Gödelnummer eines Beweises in ZFC einer Formel der Form $\forall p \in C(p \vdash_m \ulcorner A \urcorner)$ liefert, so folgt mit Theorem 5.5 und dem Konsistenzlemma 4.1, daß es eine primitiv-rekursive Funktion g gibt, die zu jeder Gödelnummer eines Widerspruchsbeweises für $\exists v_0(v_0 = v_0 \wedge v_0 \dagger v_0)$ in T die Gödelnummer eines solchen Beweises in ZFC angibt. Ist dieser Sachverhalt mit elementaren zahlentheoretischen Mitteln beweisbar, so besagt die Bemerkung in 5.5 gerade, daß im System der Peano-Arithmetik P herleitbar ist: $\text{Consis}(ZFC) \rightarrow \text{Consis}(T)$. Mit den bekannten Ergebnissen von Gödel folgt dann auch:

$$\vdash_P \text{Consis}(ZF) \rightarrow \text{Consis}(T) .$$

§ 6 Grenzen von syntaktischen Konsistenzbeweisen

6.1 Wenn wir von der Widerspruchsfreiheit einer Formel B eines formalen Systems Σ bzgl. Σ sprechen, meinen wir natürlich immer nur relative Widerspruchsfreiheit (i.e. ist Σ widerspruchsfrei, so auch $\Sigma + B$). Ganz allgemein werden die Grenzen für syntaktische Konsistenzbeweise gezogen durch den bekannten Gödelschen Satz: Ist in einem formalen System Σ die Peanoarithmetik P interpretierbar (siehe auch [20], S.204, S.61) und ist Σ widerspruchsfrei, so gibt es keine Formel A von Σ , die Gödelisierung des

Widerspruchsfreiheitsprädikats für Σ und in Σ herleitbar ist.- Nach [6], S. 326 können wir heute Konsistenzbeweise für ein System Σ der Mengenlehre in zwei Kategorien einteilen. Die eine Möglichkeit ist, die Konsistenz von Σ in einem stärkeren System Σ^* der Mengenlehre zu beweisen. Dies geschieht zum Beispiel für ZF im System der imprädikativen Mengenlehre mit Klassen in Mostowski[16].- In die zweite Kategorie fallen Beweise, die mit finiten oder anderen relativ schwachen Mitteln zeigen, daß die Konsistenz von Σ aus der Konsistenz eines Systems Σ^* folgt. Beispiele hierfür sind: $\Sigma = \text{ZF}$, $\Sigma^* = \text{ZF ohne (Ax7)}$ (siehe z.Bsp. Schütte[17], S. 102); $\Sigma^* = \text{ZF}$, $\Sigma = \text{ZF} + \text{V=L}$ (bzw. $\Sigma = \text{ZFC}$, $\Sigma = \text{ZF} + \text{GCH}$) (siehe Gödel [7],[8]; finite Beweise findet man z.Bsp. in Holz[10], Takeuti-Zaring[22]). Weitere Beispiele unter Verwendung obiger Ergebnisse sind unsere Beweise in Kapitel 2 und 3 (siehe 5.6), wobei Σ^* jeweils ZF und $\Sigma = \text{ZFC} + \neg \text{CH}$ bzw. $\text{ZF} + \neg \text{AC}$ sein wird (ebenso wird sich unsere Methode für $\Sigma = \text{ZF} + \text{GCH} + \text{V}\frac{1}{2}\text{L}$ anwenden lassen).

6.2 Nennen wir eine Formel B eines formalen Systems Σ der Mengenlehre ein Verstärkungsaxiom für Σ (siehe [6], S. 328), wenn es eine Herleitung in $\Sigma + B$ der Formel $\text{Kons}(\Sigma)$ gibt ($\text{Kons}(\Sigma)$ bedeute dabei die entsprechende Gödelisierung des Widerspruchsfreiheitsprädikats für Σ), so ergibt sich aus dem in 6.1 zitierten Satz von Gödel: Wir können keinen Beweis der Aussage $\text{Kons}(\Sigma) \rightarrow \text{Kons}(\Sigma+B)$ im System $\Sigma + B$ finden, geschweige denn (falls Σ stark genug ist) einen finiten Beweis dieser Aussage. Diese Limitierung herkömmlicher und insbesondere syntaktischer Konsistenzbeweise betrifft eine Reihe bekannter Axiome. Beispiele hierfür werden in [6], S. 327 ge-

geben, darunter

$\Sigma = \text{ZF ohne } (Ax6), B = (Ax6) ;$

$\Sigma = \text{ZF}, B = (\text{Es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl}).$

Mit den Bemerkungen in 6.1 folgt: das Fundierungsaxiom, $V=L$,
 AC , GCH , $\neg CH$, $\neg AC$, $V \neq L$ sind, bezogen jeweils auf die oben genann-
ten Systeme, keine Verstärkungsaxiome.

Kapitel 2: Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

Wir folgen dem in 1.5.6 beschriebenen Programm. Als Menge der Bedingungen wählen wir:

$$C := \{x: \text{Fkt}(x) \wedge D(x) \subseteq \omega \times \kappa_2 \wedge W(x) \subseteq \{0,1\} \wedge x \text{ endlich}\}$$

(eine Motivierung findet man zu Beginn von § 5) .

$\leq := \{ \langle p, q \rangle : p \in C \wedge q \in C \wedge p \subseteq q \}$. Es gilt:

$$\models_{ZF} C \in V \wedge \leq \in V \wedge \text{Halbordnung}(C, \leq) \quad .$$

$K(v_0)$ sei die Formel $v_0 \in V$, oder präziser mit 1.1.9:

$$K(v_0) := \leftrightarrow \exists v_1 \exists v_2 (D_V(v_1, v_2) \wedge v_0 \in v_1) \quad .$$

Da aus dem Fundierungsaxiom folgt:

$\models_{ZF} \forall x (K(x))$, können wir bei allen folgenden Beweisen und Definitionen beschränkte Quantifizierungen der Form $\exists x (K(x) \wedge A)$ ersetzen durch $\exists x A$.

Die Beweise werden informal durchgeführt, können aber alle in ZFC formalisiert werden. Als Theorie T in der Sprache von ZF (s. 1.5.6)

wählen wir die Theorie mit den folgenden nichtlogischen Axiomen:

(Ax1) - (Ax7) (d.h. ZF), (Ax8)* und S (siehe 5.4).

Mit 1.1.11 und 5.4 ergibt sich: Jede Formel, die in ZFC + $\neg CH$ herleitbar ist, ist auch in T herleitbar. Wir wollen jedem nichtlogischen Axiom von T in primitiv-rekursiver Weise einen Beweis in ZFC einer Formel der Form $\forall p \in C (p \Vdash_m \ulcorner A \urcorner)$ zuordnen (zur genauen Formulierung siehe 1.4.6, 1.5.5 und 1.5.6). Dies geschieht für (Ax1) - (Ax4) und (Ax7) in § 1, für die Fälle von (Ax5) in § 2, für (Ax6) in § 3, für (Ax8)* in § 4 und für S in § 5.

Die Beweise werden so durchgeführt, daß man sieht, wie man bei genügendem Aufwand nach geeigneter Gödelisierung in der Zahlentheorie das Programm von 1.5.6 verwirklichen kann. Den Index der Relation $\Vdash^*$ bzw. $\Vdash$ geben wir stets zu Beginn der einzelnen Unterabschnitte an, lassen ihn dann aber bis zum Beginn des nächsten Abschnitts weg.

§ 1: Erzwingung von (Ax1) - (Ax3), (Ax4) und (Ax7).

1.1 Das Extensionalitätsaxiom

(Ax1) lautet: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$. Es gilt $Rg^*(Ax1)$.

Sei $p \in C$. Wir zeigen $p \Vdash_0 \overline{(Ax1)}$.

$$p \Vdash \overline{(Ax1)} \leftrightarrow \forall x \forall y (p \Vdash \overline{\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \vee x = y}).$$

Seien $x, y \in V$. Wir geben einen Beweis für

$$\forall r \in C (r \Vdash^* \overline{\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow r \Vdash^* (x = y)}).$$

Ist dann $q \geq p$, so ex. nach 1.4.2 (ii) ein $s \geq q$ mit $s \Vdash^* \overline{\forall z (...)}$ oder

$s \Vdash^* \overline{\forall z (...)}$. In beiden Fällen folgt dann

$s \Vdash^* \overline{\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \vee x = y}$, also erzwingt p diese K-Aussage schwach.

Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \overline{\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)}$. Es folgt:

$r \Vdash \overline{\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)}$, also nach 1.4.3:

Für alle $z \in V$: $r \Vdash \overline{z \notin x \vee z \in y}$ und $r \Vdash \overline{z \notin y \vee z \in x}$.

Nach 1.4.4 gilt:

$$(*) \quad \forall z \forall t \geq r \exists s \geq t ((s \Vdash^* (z \notin x) \vee s \Vdash^* (z \in y)) \wedge (s \Vdash^* (z \notin y) \vee s \Vdash^* (z \in x))).$$

Ann.: $\neg (r \Vdash^* (x = y))$, d.h. es ex. $t_1 \geq r$ mit $t_1 \Vdash^* (x \neq y)$.

Nach Def. 1.3.5 folgt o.w.E.: es gibt $u, t_2 \leq t_1$ mit $\langle u, t_2 \rangle \in x$

und $t_1 \Vdash^* (u \notin y)$. Mit 1.5.4: $t_1 \Vdash^* (u \in x)$. Nach (*) gibt es

zu u, t_1 ein $s \geq t_1$ mit den Eigenschaften in (*). $t_1 \Vdash^* (u \in x)$,

also nach 1.4.1, 1.4.2 $\neg (s \Vdash^* (u \notin x))$, daher $s \Vdash^* (u \in y)$ nach (*)

Mit $s \geq t_1$ und $t_1 \Vdash^* (u \notin y)$ ist dies ein Widerspruch, also

gilt $r \Vdash^* (x = y)$, was zu zeigen war.

1.2 Das Paarmengenaxiom

(Ax2) lautet: $\forall x \forall y \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z = x \vee z = y)$; es folgt aus

den restlichen Axiomen von ZF, da es jedoch das einfachste Existenzaxiom ist, möge der folgende Beweis zur Veranschaulichung späterer Beweise beitragen.

Es gilt: $Rg^*(Ax2) \leq 15$. Sei $p \in C$. Wir zeigen: $p \Vdash_{15} \neg(Ax2)$.

$$p \Vdash \neg(Ax2) \leftrightarrow \forall x \forall y (p \Vdash \neg \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z = \underline{x} \vee z = \underline{y})) .$$

Es genügt also zu zeigen: für $x, y \in V$ gilt

$$p \Vdash^* \neg \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z = \underline{x} \vee z = \underline{y}) . \text{ Dies ist nach Def.1.3.5}$$

$$\text{äquivalent zu } \exists w (p \Vdash^* \forall z (z \in w \leftrightarrow z = \underline{x} \vee z = \underline{y})) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists w \forall z (p \Vdash \neg \underline{z} \in w \leftrightarrow \underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}) \quad (\text{nach 1.4.3})$$

$$\leftrightarrow \exists w \forall z (p \Vdash \neg \underline{z} \in w \vee (\underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}) \wedge p \Vdash \neg (\underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}) \vee \underline{z} \in w) .$$

Setzt man $w := \{x, y\} \times C$, so ergibt sich die Beh. mit derselben

Methode wie in 1.1. Sei $z \in V$.

(1) Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* (\underline{z} \in w)$. Es folgt: es gibt $u, r' \leq r$ mit $\langle u, r' \rangle \in w$ und $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{u})$. Aus $\langle u, r' \rangle \in w$ folgt $u = x$ oder $u = y$, also gilt nach den Gleichheitsaxiomen $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{x})$ oder $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{y})$, d.h. $r \Vdash \neg \underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}$. Wie in 1.1 folgt $p \Vdash \neg \underline{z} \in w \vee (\underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y})$.

(2) Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \neg \underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}$. O.w.E. gelte $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{x})$, ferner ist $\langle x, r \rangle \in w$, also folgt nach 1.5.4 $r \Vdash^* (\underline{z} \in w)$. Mit 1.5.3: $r \Vdash^* (\underline{z} \in w)$. Damit folgt: $p \Vdash \neg (\underline{z} = \underline{x} \vee \underline{z} = \underline{y}) \vee \underline{z} \in w$.

Mit (1) und (2) folgt aus den obigen Äquivalenzen die Beh. .

1.3 Das Axiom der Vereinigungsmenge

(Ax3) lautet: $\forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow \exists y (z \in y \wedge y \in x))$.

Es gilt: $Rg^*(Ax3) \leq 20$. Wir zeigen: ist $p \in C$, so gilt $p \Vdash_{20} (Ax3)$.

$$p \Vdash (Ax3) \leftrightarrow \forall x (p \Vdash \neg \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow \exists y (z \in y \wedge y \in \underline{x}))) . \text{ Es genügt}$$

zu zeigen: für $x \in V$ gilt: $p \Vdash^* \neg \exists w \forall z (..)$, d.h.

$$\exists w \forall z (p \Vdash \neg \underline{z} \in w \vee \exists y (y \in \underline{x} \wedge \underline{z} \in y)) \wedge p \Vdash \neg \exists y (y \in \underline{x} \wedge \underline{z} \in y) \vee \underline{z} \in w) .$$

Setze $w := \{ \langle z, r \rangle : r \in C \wedge \exists y (y \in D(x) \wedge z \in D(y) \wedge r \Vdash^* (y \in \underline{x}) \wedge r \Vdash^* (\underline{z} \in y)) \}$.

Es gilt: $w \in V$, da $C \in V$ und für alle $z \in D(x)$: $r(z) < r(x)$, wobei $r(\cdot)$ die Rangfunktion aus 1.1.9 ist.

Wir wenden 1.4.5 an. Sei $z \in V$.

- (1) Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^*(z \in w)$. Dann gibt es $u, r' \leq r$ mit $\langle u, r' \rangle \in w$ und $r \Vdash^*(z = u)$. Aus $\langle u, r' \rangle \in w$ folgt: es ex. y mit $r' \Vdash^*(y \in x)$ und $r' \Vdash^*(u \in y)$. Mit 1.4.2: $r \Vdash^*(y \in x)$ und $r \Vdash^*(u \in y)$, also mit 1.5.3: $r \Vdash^*(z \in y)$. Nach 1.4.4 ex. $s \geq r$ mit $s \Vdash^* \neg z \in y \wedge y \in x$, also auch $s \Vdash^* \exists y (z \in y \wedge y \in x)$. Nach 1.4.5: $p \Vdash^* \neg z \in \bigvee \exists y (y \in x \wedge z \in y)$.
- (2) Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \exists y (y \in x \wedge z \in y)$, also ex. $y \in V$ mit $r \Vdash^* y \in x \wedge z \in y$. Aus 1.4.2, 1.4.3 und der Def. von $\Vdash$ folgt: es gibt $s \geq r$ mit $s \Vdash^*(y \in x)$ und $s \Vdash^*(z \in y)$. Nach 1.5.4 ex. $y' \in D(x)$ mit $s \Vdash^*(y = y')$, also nach 1.5.3: $s \Vdash^*(z \in y')$. Es gibt $t \geq s$ mit $t \Vdash^*(z \in y')$. Mit 1.4.2, 1.5.3: $t \Vdash^*(y' \in x)$. Wegen $t \Vdash^*(z \in y')$ ex. wiederum nach 1.5.4 ein $z' \in D(y')$ mit $t \Vdash^*(z' \in y')$. Insgesamt folgt: $\langle z', t \rangle \in w$, also $t \Vdash^*(z' \in w)$. Da $t \Vdash^*(z' = z)$, gilt $t \Vdash^*(z \in w)$, ferner gilt $t \geq r$. Also folgt wie in 1.4.5: $p \Vdash^* \neg \exists y (y \in x \wedge z \in y) \vee z \in w$.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung.

1.4 Das Potenzmengenaxiom

(Ax4) lautet: $\forall x \exists w \forall z (\forall v (v \in z \rightarrow v \in x) \leftrightarrow z \in w)$.

Es gilt: $Rg^*(Ax4) \leq 2o$. Wir zeigen: ist $p \in C$, so gilt

$p \Vdash_{2o}^* \neg (Ax4)$. Es genügt nach 1.4.3, für $x \in V$ zu zeigen:

$p \Vdash^* \exists w \forall z (\forall v (v \in z \rightarrow v \in x) \leftrightarrow v \in w)$, d.h. es ex. $w \in V$ mit $\forall z (p \Vdash^* \neg \forall v (v \in z \rightarrow v \in x) \vee z \in w) \wedge p \Vdash^* \neg z \in \bigvee \forall v (v \in z \rightarrow v \in x)$.

Sei $z \in V, r \in C$ und es gelte

(*) $r \Vdash^* \neg \forall v (v \in z \rightarrow v \in x)$, d.h. mit 1.4.3

für alle $v \in V$: $r \Vdash^* \neg v \in z \vee v \in x$. Nach Def. von $\Vdash$ folgt:

(**) $\forall v \forall s \geq r \exists s' \geq s (s' \Vdash^* (v \notin \underline{z}) \vee s' \Vdash^* (v \in \underline{x}))$,

(unter Verwendung von 4.2) .

Setze $z' := \{ \langle u, t \rangle : u \in D(x) \wedge t \Vdash^* (u \in \underline{z}) \wedge t \Vdash^* (u \in \underline{x}) \}$!

Es gilt: $z' \in V$, da $x \in V$ und $C \in V$.

Beh.: $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z'})$.

Ann.: Es gibt $s \geq r$ mit $s \Vdash^* (\underline{z} \neq \underline{z'})$. Dann gilt (1) oder (2):

(1) Es ex. $v, s_1 \leq s$ mit $\langle v, s_1 \rangle \in z$ und $s \Vdash^* (v \notin \underline{z'})$.

$s \Vdash^* (v \in \underline{z})$ nach 1.5.4. Wegen (**) und 1.4.1 gibt es

$s' \geq s$ mit $s' \Vdash^* (v \in \underline{x})$. Also ex. $v' \in D(x)$ mit $s' \Vdash^* (v = v')$.

Nach 1.5.3: $s' \Vdash^* (v' \in \underline{x})$ und wegen $s' \geq s$ und $s \Vdash^* (v \in \underline{z})$:

$s' \Vdash^* (v' \in \underline{z})$. Damit gilt nach Definition von z' :

$\langle v', s' \rangle \in z'$, also $s' \Vdash^* (v' \in \underline{z'})$, $s' \Vdash^* (v \in \underline{z'})$ nach 1.5.3.

Aber $s \leq s'$ und $s \Vdash^* (v \notin \underline{z'})$, mit 1.4.2 ein Widerspruch

zu 1.4.1.

(2) Es ex. $v, s_1 \leq s$ mit $\langle v, s_1 \rangle \in z'$ und $s \Vdash^* (v \notin \underline{z})$.

Mit der Def. von z' folgt aus $\langle v, s_1 \rangle \in z'$: $s_1 \Vdash^* (v \in \underline{z})$,

also $s \Vdash^* (v \in \underline{z})$, ein Widerspruch zu 1.4.1.

Es folgt $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z'})$.

Die bisherigen Überlegungen waren unabhängig von w und galten einzig unter der Vor. (*).

Es gilt: $z' \subseteq D(x) \times C$.

Setze $w_1 := P(D(x) \times C) \times C$. w_1 erlaubt uns, eine Richtung der Äquivalenz zu erzwingen. Wir brauchen jedoch

$w := \{ \langle z, t \rangle : z \in D(w_1) \wedge t \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w_1}) \wedge t \Vdash^* \forall v (v \in \underline{z} \rightarrow v \in \underline{x}) \}$.

Sei $z \in V$, $r \in C$ und es gelte (*).

Dann gilt mit obigen Bezeichnungen:

$r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z'})$, ferner $z' \in D(w_1)$. Es folgt:

$\langle z', r \rangle \in w_1$, also nach 1.5.4 $r \Vdash^* (\underline{z'} \in \underline{w_1})$.

Mit (*) und 1.5.3 folgt: $r \Vdash \neg \forall v (v \in \underline{z}' \rightarrow v \in \underline{x})$, also ex.
 ein $s \geq r$ mit $s \Vdash^* \neg \forall v (v \in \underline{z}' \rightarrow v \in \underline{x})$, ferner $s \Vdash^* (\underline{z}' \in \underline{w}_1)$.
 Damit gilt $\langle z', s \rangle \in w$, also $s \Vdash^* (\underline{z}' \in \underline{w})$. Da $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z}')$,
 folgt $s \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w})$.

Mit 1.4.5 ergibt sich: $p \Vdash \neg \forall v (v \in \underline{z} \rightarrow v \in \underline{x}) \vee \underline{z} \in \underline{w}$.

Sei $z \in V$, $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w})$.

Dann gibt es z' und $r' \leq r$ mit $\langle z', r' \rangle \in w$, $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z}')$.

Nach Def. von w und wegen $r' \leq r$ folgt dann:

$r \Vdash^* \neg \forall v (v \in \underline{z}' \rightarrow v \in \underline{x})$, also nach 1.5.3:

Es gibt ein $s \geq r$ mit $s \Vdash^* \neg \forall v (v \in \underline{z} \rightarrow v \in \underline{x})$.

Mit 1.4.5 ergibt sich:

$p \Vdash \neg \underline{z} \in \underline{w} \vee \forall v (v \in \underline{z} \rightarrow v \in \underline{x})$.

Insgesamt folgt die Behauptung.

1.5 Das Fundierungsaxiom

(Ax7) lautet: $\forall x[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x))]$.

Es gilt: $Rg^*(Ax7) \in 2o$. Wir zeigen: ist $p \in C$, so gilt $p \Vdash_{2o} \neg(Ax7)$.

Wir wenden 1.4.5 an. Sei $x \in V$, $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \exists y(y \in \underline{x})$.

Dann ex. $y \in V$ mit $r \Vdash^*(y \in \underline{x})$, d.h. insbesondere gilt:

$\exists s \geq r (s \Vdash^*(y \in \underline{x}))$. Mit Hilfe von (Ax7) erhalten wir die Menge

$w := \{u: \exists s \geq r (s \Vdash^*(u \in \underline{x})) \wedge \forall z[\exists s \geq r (s \Vdash^*(z \in \underline{x})) \rightarrow r(u) \leq r(z)]\}$

($w \in V$, da $w \subseteq V_\alpha$ für ein $\alpha \in On$).

Nach dem Vorangehenden ist $w \neq \emptyset$. Sei $u \in w$, d.h. es ex. $s \geq r$

mit $s \Vdash^*(u \in \underline{x})$.

Beh.: $s \Vdash^* \neg \exists z(z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$.

Gesetzt nicht, so ex. $s_1 \geq s$ mit $s_1 \Vdash^* \exists z(z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$, d.h.

es ex. $z \in V$ mit $s_1 \Vdash^*(z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$. Nach 1.4.2 und der Def.

von $\Vdash$ ex. $s_2 \geq s_1$ mit $s_2 \Vdash^*(z \in \underline{u})$ und $s_2 \Vdash^*(z \in \underline{x})$. Nach 1.5.4.

ex. $z' \in D(u)$ mit $s_2 \Vdash^*(z = z')$. Mit 1.5.3: $s_2 \Vdash^*(z' \in \underline{x})$, ferner

$s_2 \geq r$, also nach Wahl von u : $r(u) \leq r(z')$. Da aber $z' \in D(u)$,

folgt $r(z') < r(u)$, ein Widerspruch.

Damit gilt: $s \Vdash^* \neg \underline{u} \in \underline{x} \wedge \neg \exists z(z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$, also gibt es $t \geq s$

mit $t \Vdash^* \underline{u} \in \underline{x} \wedge \neg \exists z(z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$, damit

$t \Vdash^* \exists y(y \in \underline{x} \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in \underline{x}))$. Da $t \geq r$, folgt mit 1.4.5 die

Behauptung.

§ 2: Die Erzwingung des Ersetzungsaxioms

2.1 Jedes Ersetzungsaxiom hat die Form $\forall x_1 \dots \forall x_n (Pr \rightarrow Ko)$, wobei Pr die Formel $\forall x \forall y \forall z (A(x, y) \wedge A(x, z) \rightarrow y = z)$ und Ko die Formel $\forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge A(u, z)))$ ist, w nicht frei in A auftritt und $x_1, \dots, x_n$ die in $Pr \rightarrow Ko$ auftretenden freien Variablen sind. O.w.E. können wir annehmen, daß $Pr \rightarrow Ko$ geschlossene Formel ist.

Sei $m := Rg^*(Pr \rightarrow Ko)$. Wir zeigen $\forall p \in C (p \Vdash_m \overline{Pr \rightarrow Ko})$.

Sei $p \in C$. Mit 1.4.5 müssen wir zeigen: ist $r \in C$ und gilt $r \Vdash_m^* \overline{Pr}$, so ex. $s' \geq r$ mit $s' \Vdash_m^* \overline{Ko}$.

Nach 1.4.3 und der Definition von $\Vdash$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} r \Vdash_m^* \overline{Pr} &\leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (r \Vdash \overline{A(x, y) \wedge A(x, z) \rightarrow y = z}) \\ &\leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \forall r_1 \geq r (r_1 \Vdash_m^* \overline{A(x, y) \wedge A(x, z)} \vee y = z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } r_2 \Vdash_m^* \overline{A(x, y) \wedge A(x, z)} \vee y = z &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\neg \exists r_3 \geq r_2 (r_3 \Vdash_m^* \overline{A(x, y) \wedge A(x, z)})) \vee r_2 \Vdash_m^* (y = z) \\ \leftrightarrow (\exists r_3 \geq r_2 (r_3 \Vdash_m^* \overline{A(x, y) \wedge A(x, z)})) \rightarrow r_2 \Vdash_m^* (y = z) \end{aligned}$$

Also folgt:

$$(*) \quad r \Vdash_m^* \overline{Pr} \leftrightarrow \forall x, y, z \forall r_1 \geq r \exists r_2 \geq r_1 (\exists r_3 \geq r_2 (r_3 \Vdash_m^* \overline{A(x, y) \wedge A(x, z)}) \rightarrow r_2 \Vdash_m^* (y = z)).$$

Wir werden zu $x \in V$ ein $w \in V$ so angeben, daß für alle $z \in V$ gilt:

- (1) $r \Vdash_m^* \overline{K_1}$, wobei $\overline{K_1} := \overline{\neg \exists u (u \in x \wedge A(u, z)) \vee z \in w}$ und
- (2) $r \Vdash_m^* \overline{K_2}$, wobei $\overline{K_2} := \overline{z \notin w \vee \exists u (u \in x \wedge A(u, z))}$.

Dann folgt $r \Vdash_m^* \overline{K_1 \wedge K_2}$, also

$$\begin{aligned} r \Vdash_m^* \overline{\forall z (z \in w \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge A(u, z)))} &\text{ nach 1.4.3, also} \\ r \Vdash_m^* \overline{\exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge A(u, z)))} &\text{ nach Def. 1.3.5, also} \\ r \Vdash_m^* \overline{Ko} &\text{ nach 1.4.3.} \end{aligned}$$

2.2 Sei $x \in V$. Für $a \in D(x)$, $s \geq r$ (r aus 2.1) definieren wir

in ZFC: $Q(s, a)$ sei ein y kleinsten Ranges mit der Eigenschaft

$\exists t \geq s (t \Vdash^* \overline{A(a, y)})$, falls ein solches ex..

$w_1 := \{Q(s, a) : s \geq r \wedge a \in D(x) \wedge s \Vdash^* (\underline{a} \in \underline{x})\}$.

Es gilt: $w_1 \in V$ nach AC und wegen $x \in V$, $C \in V$.

$w := \{ \langle u, t \rangle : \exists s \in C \exists a [u = Q(s, a) \wedge u \in w_1 \wedge \exists s' \geq s (s' \Vdash^* \overline{A(a, u)}) \wedge \wedge \forall t' \geq t (Vtr(t', s')))] \}$.

$\langle u, t \rangle \in w$ bedeutet also: es gibt eine Erweiterung s von r und ein $a \in D(x)$, so daß sogar eine solche Erweiterung s' von s $\overline{A(a, u)}$ erzwingt, die mit allen Erweiterungen von t verträglich ist; (zur Def. von Vtr siehe 1.1.6).

Da $w_1 \in V$ und $C \in V$, folgt $w \in V$.

2.3 Beweis von $r \Vdash^* \overline{K_1}$:

Sei $z \in V$, $q \geq r$ und $s \geq q$ und es gelte $s \Vdash^* \exists u (u \in \underline{x} \wedge A(u, z))$.

Mit 1.4.4 folgt: es ex. $u \in V$, $s_1 \geq s$ mit $s_1 \Vdash^* (\underline{u} \in \underline{x})$ und $s_1 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}, z)}$. Nach 1.5.4 gibt es $u' \in D(x)$ mit $s_1 \Vdash^* (\underline{u} = \underline{u}')$.

Mit 1.4.3: $s_1 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', z)}$, also gibt es $s_2 \geq s_1$ mit $s_2 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', z)}$ und $s_2 \Vdash^* (\underline{u}' \in \underline{x})$.

Wähle $Q(s_2, u')$ gemäß Definition von Q in 2.2 .

Es folgt: $Q(s_2, u') \in w_1$.

Nach Definition von $Q(s_2, u')$ ex. $s_3 \geq s_2$ mit $s_3 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', Q(s_2, u'))}$.

Mit 1.4.2 folgt $s_3 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', z)}$. Nach 1.44 gibt es $s_4 \geq s_3$ mit
(**) $s_4 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', z) \wedge A(\underline{u}', Q(s_2, u'))}$.

Wendet man (*) aus 2.1 an, so gilt wegen $s_4 \geq r$:

es ex. $s_5 \geq s_4$ mit: $\exists s_6 \geq s_5 (s_6 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', z) \wedge A(\underline{u}', Q(s_2, u'))}) \rightarrow$
 $\rightarrow s_5 \Vdash^* (\underline{z} = \underline{Q(s_2, u')})$.

Aus (**) und 1.4.2 folgt: $s_5 \Vdash^* (\underline{z} = \underline{Q(s_2, u')})$.

Nun gilt: $\langle Q(s_2, u'), s_5 \rangle \in w$, denn:

$Q(s_2, u') \in w_1$, $s_5 \geq s_2$, $s_5 \Vdash^* \overline{A(\underline{u}', Q(s_2, u'))}$ und alle $t' \geq s_5$ sind

natürlich verträglich mit s_5 . Es folgt mit 1.5.4:

$s_5 \Vdash^* (Q(s_2, u') \in w)$, damit $s_5 \Vdash^* (z \in w)$, ferner ist $s_5 \geq r$.

Nach 1.4.2 (ii) gibt es zu $q \geq r$ ein $s \geq q$ mit

$s \Vdash^* \exists u (u \in x \wedge A(u, z))$ oder $s \Vdash^* \neg \exists u (..)$. Im ersten Fall gilt

nach dem gerade Gezeigten: es gibt $s_5 \geq s$ mit $s_5 \Vdash^* (z \in w)$,

also $s_5 \Vdash^* \neg K_1$, im zweiten Fall gilt $s \Vdash^* \neg K_1$, also in

beiden Fällen $r \Vdash \neg K_1$.

2.4 Beweis von $r \Vdash \neg K_2$:

Analog zur Methode in 2.3: Sei $z \in V$, $q \geq r$, $s \geq q$ und es gelte $s \Vdash^* (z \in w)$.

Dann ex. $s' \leq s$, $z' \in V$ mit $\langle z', s' \rangle \in w$ und $s \Vdash^* (z = z')$.

$\langle z', s' \rangle \in w$ impliziert: es gibt s_1 und a mit $a \in D(x)$, $s_1 \Vdash^* (a \in x)$,

$z' = Q(s_1, a)$ und es ex. $s_2 \geq s_1$ mit $s_2 \Vdash^* \neg A(a, z')$ und für alle

$s_3 \geq s'$ gilt: $\forall r (s_3, s_2)$.

Da $s \geq s'$, gibt es s_4 mit $s_4 \geq s$ und $s_4 \geq s_2$. Nach 1.4.2 gilt:

$s_4 \Vdash^* (z = z')$ und $s_4 \Vdash^* \neg A(a, z')$, also nach 1.5.3: $s_4 \Vdash \neg A(a, z)$.

Damit ex. $s_5 \geq s_4$ mit $s_5 \Vdash^* \neg A(a, z)$. $s_1 \Vdash^* (a \in x)$ und $s_5 \geq s_1$

impliziert $s_5 \Vdash^* (a \in x)$, also ex. mit 1.4.4 ein $s_6 \geq s_5$ mit

$s_6 \Vdash^* \neg (a \in x \wedge A(a, z))$, d.h. $s_6 \Vdash^* \neg \exists u (A(u, z) \wedge u \in x)$.

Da ferner $s_6 \geq s$, folgt wie oben: $r \Vdash \neg K_2$.

Mit den Bemerkungen in 2.1 folgt die Behauptung.

§ 3: Erzwingung des Unendlichkeitsaxioms

3.1 (Ax6) lautet: $\exists u [\exists y (y \in u \wedge \neg \exists z (z \in y)) \wedge \forall x (x \in u \rightarrow \rightarrow \exists z (z \in u \wedge \forall v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v \in x)))]$.

Def.: $Nf(x, y) := \leftrightarrow \forall v (v \in y \leftrightarrow v = x \vee v \in x)$

(y ist Nachfolger von x) .

$Z(x) := \leftrightarrow \neg \exists y (y \in x) \quad (x = 0)$.

$Ind(u) := \leftrightarrow \exists y (y \in u \wedge Z(y)) \wedge \forall x (x \in u \rightarrow \exists z (z \in u \wedge Nf(x, z)))$.

(u ist induktiv) .

Damit läßt sich (Ax6) schreiben als: $\exists u (Ind(u))$.

$x = \omega$ ist Abkürzung für die Formel $D(x)$ mit

$D(x) \leftrightarrow Ind(x) \wedge \forall u (Ind(u) \rightarrow x \subseteq u)$.

Def.: Für $\alpha \in On$ definieren wir rekursiv:

$\hat{\alpha} := \{ \hat{\sigma} : \sigma < \alpha \} \times C$.

3.2 Es gilt: $Rg^*(Ax6) \neq \emptyset$. Wir zeigen: ist $p \in C$, so gilt $p \Vdash_{\beta_0}^* \overline{(Ax6)}$.

$p \Vdash^* \overline{(Ax6)} \leftrightarrow \exists u (p \Vdash^* \overline{Ind(u)}) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \exists u (p \Vdash^* \overline{\exists y (y \in u \wedge Z(y))} \wedge p \Vdash^* \overline{\forall x (x \in u \rightarrow \exists z (z \in u \wedge Nf(x, z)))})$.

Setze $u := \hat{\omega} = \{ \hat{\alpha} : \alpha \in \omega \} \times C$.

Es gilt: $\hat{0} = 0$, also $\langle 0, p \rangle \in \hat{\omega}$, also $p \Vdash^* (\underline{0} \in \hat{\omega})$.

Ann.: $\neg (p \Vdash^* \overline{\exists z (z \in \underline{0})})$, so ex. ein $q \geq p$ mit $q \Vdash^* \overline{\exists z (z \in \underline{0})}$,

also gibt es $q' \leq q$, z' mit $\langle q', z' \rangle \in 0$, ein Widerspruch.

Sei $s \geq p$, so ex. nach 1.4.4 ein $r \geq s$ mit

$r \Vdash^* \underline{0} \in \hat{\omega} \wedge \neg \exists z (z \in \underline{0})$, also $r \Vdash^* \overline{\exists y (y \in u \wedge \neg \exists z (z \in y))}$.

Damit folgt: $p \Vdash^* \overline{\exists y (y \in u \wedge Z(y))}$.

3.3 Zu zeigen: $p \Vdash^* \overline{\forall x (x \in \hat{\omega} \rightarrow \exists z (z \in \hat{\omega} \wedge Nf(x, z)))}$.

Sei $x \in V$. Wir wenden 1.4.5 an: sei $r \in C$, $r \Vdash^* (x \in \hat{\omega})$.

Dann gibt es $s \leq r$ und $x' \in V$ mit $\langle x', s \rangle \in \hat{\omega}$ und $r \Vdash^* (x = x')$.

Es folgt: $x' = \hat{\alpha}$ für ein $\alpha \in \omega$. Setze $z := \hat{\alpha+1}$.

Es gilt: $\langle z, r \rangle \in \hat{\omega}$, also $r \Vdash^* (\underline{z} \in \hat{\omega})$.

Wir zeigen: $r \Vdash \neg \text{Nf}(\underline{x}, \underline{z})$, d.h.

$$r \Vdash \forall v (v \in \underline{z} \leftrightarrow v = \underline{x} \vee v \in \underline{x}).$$

(1) Sei $v \in V$, $r_1 \geq r$ und $t \geq r_1$ mit $t \Vdash^* (v \in \underline{z})$.

Dann gibt es $v' \in V$, $t' \leq t$ mit $\langle v', t' \rangle \in \hat{\alpha+1}$ und $t \Vdash^* (v = v')$.

Es folgt: $v' = \hat{\sigma}$ mit $\sigma < \alpha+1$.

1. Fall: $\sigma = \alpha$. Dann ist $x' = v'$. Da $r \Vdash^* (\underline{x} = x')$ und $t \geq r$, folgt mit 1.5.3 $t \Vdash^* (\underline{x} = \underline{v})$, also $t \Vdash^* (\underline{x} = \underline{v} \vee \underline{v} \in \underline{x})$.

2. Fall: $\sigma < \alpha$. Dann gilt $\langle v', t' \rangle \in x'$, also $t \Vdash^* (v' \in x')$, also $t \Vdash^* (v \in x')$. Mit $r \Vdash^* (\underline{x} = x')$ folgt nach 1.5.3:

es gibt $t_1 \geq t$ mit $t_1 \Vdash^* (\underline{v} = \underline{x} \vee \underline{v} \in \underline{x})$.

Insgesamt folgt wie in 2.3: $r \Vdash \underline{v} \notin \underline{z} \vee (v = \underline{x} \vee v \in \underline{x})$.

(2) Analog zeigt man: $r \Vdash \neg (\underline{v} = \underline{x} \vee \underline{v} \in \underline{x}) \vee \underline{v} \in \underline{z}$.

Es folgt mit $r \Vdash^* (\underline{z} \in \hat{\omega})$:

$$r \Vdash \underline{z} \in \hat{\omega} \wedge \forall v ((v \in \underline{z} \leftrightarrow v = \underline{x} \vee v \in \underline{x})).$$

Also ex. $r_1 \geq r$ mit $r_1 \Vdash^* \exists z (z \in \hat{\omega} \wedge \text{Nf}(\underline{x}, z))$.

Mit 1.4.5 folgt die Beh. in 3.3. Aus 3.2 und 3.3 folgt:

$\forall p \in C(p \Vdash^* \neg (Ax6))$, also $\forall p \in C(p \Vdash \neg (Ax6))$.

3.4 Eine Analyse des vorangehenden Beweises liefert:

$$(1) \vdash_{ZF} \forall p \in C(p \Vdash_{\beta_0} \neg \text{Ind}(\hat{\omega}))$$

$$(2) \vdash_{ZF} \forall p \in C \forall \alpha \in \omega (p \Vdash_{\beta_0} \neg \text{Nf}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha+1}))$$

$$(3) \vdash_{ZF} \forall p \in C(p \Vdash_{\beta_0} \neg \underline{z}(\underline{0}))$$

Der Beweis zu (1) folgt aus 3.2 und 3.3, der Beweis zu (3)

aus 3.2. Beim Beweis von (2) gehe man vor wie beim obigen

Beweis von $r \Vdash \neg \text{Nf}(\underline{x}, \underline{z})$.

§ 4: Die Erzwingung des Auswahlaxioms

4.1 Nach 1.1.11 ist AC äquivalent zu AC^* . AC^* hat die Form

$\forall z (Pr \rightarrow Ko)$, wobei Pr die Formel

$$\forall w (w \in z \rightarrow \exists a (a \in w)) \wedge \forall w, w_1 (w \in z \wedge w_1 \in z \wedge \exists a (a \in w \wedge a \in w_1) \rightarrow w = w_1)$$

und Ko die Formel

$$\exists y [\forall w (w \in z \rightarrow \exists a (a \in w \wedge a \in y)) \wedge \wedge \forall w \forall a \forall b (w \in z \wedge a \in y \wedge b \in y \wedge a \in w \wedge b \in w \rightarrow a = b)]$$

Sei $m := Rg^*(\forall z (Pr \rightarrow Ko))$. Wir zeigen: $\forall p \in C(p \Vdash_m \overline{\forall z (Pr \rightarrow Ko)})$.

Sei also $p \in C$, $z \in V$.

$$W := \bigcup \{D(w) : w \in D(z)\}.$$

Es folgt: $W \in V$. Mit AC gibt es eine Wohlordnung $\triangleleft$ von W .

4.2 Hilfssatz:

$$\forall q \in C \forall w \in D(z) (q \Vdash^* \exists c (c \in \underline{w}) \rightarrow \exists a \in W \exists r \geq q (r \Vdash^* (a \in \underline{w}) \wedge \wedge \forall b \in W (b \triangleleft a \rightarrow r \Vdash^* (b \notin \underline{w}))))).$$

Beweis: Sei $q \in C$, $w \in D(z)$ und es gelte $q \Vdash^* \exists c (c \in \underline{w})$.

Dann ex. $c \in V$ mit $q \Vdash^* (c \in \underline{w})$. Nach 1.5.4 gibt es c' mit $c' \in D(w)$ und $q \Vdash^* (c' \in \underline{w})$. Da $w \in D(z)$, ist $c' \in W$.

Betrachte $W' := \{a : a \in W \wedge \exists r \geq q (r \Vdash^* (a \in \underline{w}))\}$.

$c' \in W'$, also $W' \neq \emptyset$. Daher gibt es ein bzgl. $\triangleleft$ kleinstes Element $a_0 \in W'$. Es folgt: es ex. $r \geq q$ mit $r \Vdash^* (a_0 \in \underline{w})$.

Ann.: es gibt $b \in W$ mit $b \triangleleft a_0$ und $\neg (r \Vdash^* (b \in \underline{w}))$.

Dann ex. $s \geq r$ mit $s \Vdash^* (b \in \underline{w})$. Da $s \geq q$, ist dies ein

Widerspruch zur $\triangleleft$ -Minimalität von a_0 .

4.3 Wir verwenden die Bezeichnungen aus 4.1. Zum Beweis wenden wir

1.4.5 an. Sei also $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \overline{Pr}$. Daraus folgt mit 1.4.3:

- (1) $\forall w \forall r_1 \geq r \exists s \geq r_1 (s \Vdash^* \neg (w \notin z \vee \exists a (a \in w)))$ und
 (2) $\forall w, w_1 \forall r_1 \geq r \exists s \geq r_1 (s \Vdash^* \neg (w \in z \wedge w_1 \in z \wedge \exists a (a \in w \wedge a \in w_1))) \vee w = w_1)$

Zu zeigen: es ex. $t \geq r$ mit $t \Vdash^* \neg Ko$.

Wir behaupten: $r \Vdash^* \neg Ko$, d.h. es gibt ein $y \in V$ mit

- (3) $\forall w (r \Vdash^* \neg (w \notin z \vee \exists a (a \in w \wedge a \in y)))$ und
 (4) $\forall w \forall a \forall b (r \Vdash^* \neg (w \in z \wedge a \in y \wedge b \in y \wedge a \in w \wedge b \in w) \vee a = b)$.

Setze $y := \{ \langle a, s \rangle : \exists w (w \in D(z) \wedge a \in w \wedge s \Vdash^* (w \in z) \wedge s \Vdash^* (a \in w) \wedge \forall b (b \triangleleft a \rightarrow s \Vdash^* (b \notin w))) \}$.

Es gilt: $y \in V$, da $W \in V$ und $C \in V$.

4.4 Beweis von (3): Sei $q \geq r$, $s \geq q$, $s, q \in C$ und es gelte $s \Vdash^* (w \in z)$

für $w \in V$. Nach 1.5.4 gibt es $w_1 \in D(z)$ mit $s \Vdash^* (w = w_1)$ und $s \Vdash^* (w_1 \in z)$. Nach Vor. (1) und 1.4.1 ex. $s_2 \geq s$ mit $s_2 \Vdash^* \exists a (a \in w_1)$.

Nach dem Hilfssatz gibt es $a_1 \in W$, $s_2 \geq s_1$ mit $s_2 \Vdash^* (a_1 \in w_1)$ und $\forall b \in W (b \triangleleft a_1 \rightarrow s_2 \Vdash^* (b \notin w_1))$. Ferner gilt $s_2 \Vdash^* (w_1 \in z)$ und $w_1 \in D(z)$. Also ist $\langle a_1, s_2 \rangle \in y$, damit $s_2 \Vdash^* (a_1 \in y)$.

Wegen $s_2 \Vdash^* (a_1 \in w_1)$ und $s_2 \Vdash^* (w = w_1)$ gibt es nach 1.5.3 und 1.4.4 ein $s_3 \geq s_2$ mit $s_3 \Vdash^* \neg (a_1 \in y \wedge a_1 \in w)$, also $s_3 \Vdash^* \exists a (a \in y \wedge a \in w)$.

Da $s_3 \geq s$, folgt (3) mit der üblichen Anwendung von 1.4.1 (s. 3.2).

4.5 Beweis von (4): Seien $a, b, w \in V$, $s, q \in C$ und es gelte $q \geq r$, $s \geq q$

und $s \Vdash^* \neg (w \in z \wedge a \in y \wedge b \in y \wedge a \in w \wedge b \in w)$.

Nach 1.4.4 gibt es $s_1 \geq s$ mit:

$s_1 \Vdash^* (w \in z)$ und $s_1 \Vdash^* (a \in y)$ und $s_1 \Vdash^* (b \in y)$ und $s_1 \Vdash^* (a \in w)$ und $s_1 \Vdash^* (b \in w)$. Also gibt es $a_1, b_1, t_1 \leq s_1, t_2 \leq s_1$ mit: $\langle a_1, t_1 \rangle \in y$, $\langle b_1, t_2 \rangle \in y$, $s_1 \Vdash^* (a_1 \in y)$, $s_1 \Vdash^* (a = a_1)$, $s_1 \Vdash^* (b_1 \in y)$, $s_1 \Vdash^* (b = b_1)$. Ferner ex. $w_1 \in D(z)$ mit $s_1 \Vdash^* (w_1 \in z)$ und $s_1 \Vdash^* (w = w_1)$.

Aus $\langle a_1, t_1 \rangle \in y$ folgt: es gibt $w_2 \in D(z)$ mit $t_1 \Vdash^* (w_2 \in z)$,

$t_1 \Vdash^* (a_1 \in u_2)$ und $\forall c (c \triangleleft a_1 \rightarrow t_1 \Vdash^* (c \notin u_2))$. Ferner $a_1 \in W$.

Da $t_1 \leq s_1$, folgt mit 1.4.2:

(5) $s_1 \Vdash^* (u_2 \in z)$ und $s_1 \Vdash^* (a_1 \in u_2)$ und $\forall c (c \triangleleft a_1 \rightarrow s_1 \Vdash^* (c \notin u_2))$.

Dieselben Argumente für $\langle b_1, t_2 \rangle \in y$ liefern $b_1 \in W$ und mit

$t_2 \leq s_1$: es ex. $w_3 \in D(z)$ mit

(6) $s_1 \Vdash^* (w_3 \in z)$ und $s_1 \Vdash^* (b_1 \in w_3)$ und $\forall c (c \triangleleft b_1 \rightarrow s_1 \Vdash^* (c \notin w_3))$.

Aus $s_1 \Vdash^* (a_1 \in u_2)$, $s_1 \Vdash^* (a = a_1)$, $s_1 \Vdash^* (a \in u)$ und

$s_1 \Vdash^* (b_1 \in w_3)$, $s_1 \Vdash^* (b = b_1)$, $s_1 \Vdash^* (b \in w)$

folgt mit $s_1 \Vdash^* (u \in z)$, $s_1 \Vdash^* (u_2 \in z)$, $s_1 \Vdash^* (w_3 \in z)$ unter Ausnutzung

von Vor. (2) und $s_1 \geq r$: es gibt ein $s_2 \geq s_1$ mit

$s_2 \Vdash^* (u = u_2)$ und $s_2 \Vdash^* (u = w_3)$, also $s_2 \Vdash^* (u_2 = w_3)$.

Da ferner $s_1 \Vdash^* (u = u_1)$, gilt $s_2 \Vdash^* (u_1 = u_2)$ und $s_2 \Vdash^* (u_1 = w_3)$.

Mit 1.5.3 ergibt sich aus (5) und (6): es ex. ein $s_3 \geq s_2$ mit

(7) $s_3 \Vdash^* (a = a_1)$ und $s_3 \Vdash^* (a_1 \in u_1)$ und $\forall c (c \triangleleft a_1 \rightarrow s_3 \Vdash^* (c \notin u_1))$

und

(8) $s_3 \Vdash^* (b = b_1)$ und $s_3 \Vdash^* (b_1 \in w_1)$ und $\forall c (c \triangleleft b_1 \rightarrow s_3 \Vdash^* (c \notin w_1))$!

Es galt:

$a_1, b_1 \in W$. Ann.: $a_1 \triangleleft b_1$, so folgt aus (8): $s_3 \Vdash^* (a_1 \notin w_1)$, ein Widerspruch zu $s_3 \Vdash^* (a_1 \in w_1)$.

Ann.: $b_1 \triangleleft a_1$, so folgt mit (7) analog ein Widerspruch.

Also: $a_1 = b_1$, d.h. aber: $s_3 \Vdash^* (a = b)$ nach 1.5.3.

Da $s_3 \geq s_2 \geq r$, ergibt die übliche Anwendung von 1.4.1

die Behauptung (4).

§ 5: Die Unabhängigkeit der Kontinuums-hypothese

Als Bemerkung sei vorangeschickt, daß wir von der speziellen Wahl der Menge der Bedingungen C in den vorangehenden Paragraphen noch keinen Gebrauch gemacht haben, sondern nur die Eigenschaften der Reflexivität und Transitivität der Halbordnung ausgenutzt haben. Für die Definition $K(v_0) : \leftrightarrow v_0 \in V$ werden also im System ZFC alle Axiome von ZFC in dem von uns in 1.5.5 präzisierten Sinne erzwungen, unabhängig von der Wahl von C .

Die zu Beginn von Kapitel 2 definierten Bedingungen geben endliche Information über $\aleph_2$ -viele charakteristische Funktionen von Teilmengen von ω . Definieren wir:

$Sur(x, y) : \leftrightarrow \exists z \forall u (u \in y \rightarrow \exists v (v \in x \wedge B(v, u, z) \wedge \forall w (B(v, w, z) \rightarrow u = w)))$
(es gibt eine surjektive Abbildung von x auf y), wobei

$B(v, u, z) : \leftrightarrow \langle v, u \rangle \in z$, und ist $D(x)$ die in 3.1 angegebene Formel,

für die wir die Abkürzung $x = \omega$ benutzen, so werden wir Mengen a, b

und c angeben, so daß jede Bedingung die folgenden K -Aussagen

schwach erzwingt: $\ulcorner D(\underline{a}) \urcorner$, $\ulcorner \underline{a} \subseteq \underline{b} \urcorner$, $\ulcorner \underline{b} \subseteq P(\underline{a}) \urcorner$, $\ulcorner Sur(\underline{a}, \underline{a}) \urcorner$, $\ulcorner Sur(\underline{a}, \underline{b}) \urcorner$.

Modelltheoretisch gesehen entsprechen die Elemente von b $\aleph_2$ -vie-

len generischen Mengen, die man zu einem ZFC-Modell N adjungiert

und für die man erzwingen kann, daß sie Teilmengen von ω sind.

Um zu zeigen, daß im so erhaltenen Cohen-Modell N' die Kontinuum-

hypothese falsch ist, muß man beweisen, daß N und N' dieselben Kar-

dinalzahlen haben. Dies folgt aus der Tatsache, daß C die abzählbare

Kettenbedingung (siehe 5.1) erfüllt (s. Cohen[4], S. 129ff).

Wir bringen im Folgenden die unseren Zielen entsprechende forma-

lisierte Fassung dieses Beweises und übertragen einige Vereinfach-

ungen aus Shoenfield[20] auf unser System.

5.1 Def.: $AKB(x, \leq) : \Leftrightarrow \text{Halbordnung}(x, \leq) \wedge \forall w (w \subseteq x \wedge \forall u, v \in w (\neg \text{Vtr}(u, v)) \rightarrow |w| \leq \aleph_0)$

(die durch $\leq$ halbgeordnete Menge x erfüllt die abzählbare Kettenbedingung).

Lemma: $AKB(C, \subseteq)$.

Beweis: Ann.: Es ex. $w \subseteq C$ mit $|w| > \aleph_0$ und $\forall u, v \in w: \neg \text{Vtr}(u, v)$.

Sei $w_\alpha := \{p: p \in w \wedge |D(p)| = \alpha\}$ für $\alpha \in \omega$.

Es gilt: $w = \bigcup \{w_\alpha: \alpha \in \omega\}$. Aus der Annahme folgt:

Es gibt $\sigma \in \omega$ mit $|w_\sigma| > \aleph_0$.

Sei $p_0 \in C$ so gewählt, daß für $w'_0 := \{p: p \in w_\sigma \wedge p_0 \subseteq p\}$

gilt $|w'_0| > \aleph_0$ (ein solches p_0 ex., da z.Bsp. 0 diese Eigenschaft hat) und für alle $q \in C$ mit dieser Eig. folgt:

$|q| \leq |p_0|$. Sei $q_0 \in w'_0$ und $q_0 \not\supset p_0$; dann ex. ein $k \in \omega$ mit

$q_0 - p_0 = \{\langle u_j, i_j \rangle : u_j \in \omega \times \aleph_2 \wedge i_j \in \{0, i\} \wedge j \in k\}$.

Für $j \in k$ sei $A_j := \{q \in w'_0 : \langle u_j, i-1_j \rangle \in q\}$.

Nach Vor. gilt o.w.E.: $|A_j| > \aleph_0$. Es folgt:

$|\{p \in w'_0 : p_0 \cup \langle u_1, i-1 \rangle \subseteq p\}| > \aleph_0$. Da $\langle u_1, i-1 \rangle \not\supset p_0$

wegen $p_0 \subseteq q_0$, ist dies ein Widerspruch zur Wahl von p_0 .

Bemerkung: Beim Beweis wurde AC benutzt. Eine Verallgemeinerung des Lemmas für Produkte von Halbordnungen findet man in Jech[11], S. 67.

5.2 Die wesentliche Anwendung von 5.1 geschieht im folgenden Lemma.

Def.: $\text{Sep}(u) : \Leftrightarrow \forall q \in C \forall x, y (x \in u \wedge y \in u \wedge q \Vdash^* (x = y) \rightarrow x = y)$
(u ist separiert).

Lemma: $\forall x \forall y (|x| \geq \aleph_0 \wedge \text{Sep}(y) \wedge \exists q \in C (q \Vdash_{20}^* \overline{\text{Sur}(x \times C, y \times C)}) \rightarrow |y| \leq |x|)$.

(Es gilt: $\text{Rg}^*(\text{Sur}(u, v)) \leq 2o$).

Beweis: Seien $c, d \in V$ und es gebe $q \in C$ mit

$q \Vdash^* \overline{\text{Sur}(c \times C, d \times C)}$, ferner gelte $\text{Sep}(d)$ und $|c| \geq \aleph_0$.

Es folgt: es gibt ein $f \in V$, so daß für alle $y \in V$ gilt:

$$q \Vdash \overline{y \notin d \times C} \vee (\exists x (x \in c \times C \wedge B(x, y, f) \wedge \forall z (B(x, z, f) \rightarrow z = y)))^{\neg}.$$

$$\text{D.h. } \forall q' \geq q \exists r \geq q' (r \Vdash^* (y \notin d \times C) \vee r \Vdash^* \exists x (...)^{\neg}).$$

Es folgt mit 1.4.4:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \forall q' \geq q \exists r \geq q' (\exists t \geq r (t \Vdash^* (y \in d \times C)) \rightarrow \\ & \rightarrow \exists x \exists s \geq r (s \Vdash^* (\underline{x} \in c \times C) \wedge s \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, y, f)} \wedge \\ & \wedge s \Vdash^* \overline{\forall z (B(\underline{x}, z, f) \rightarrow z = y)}^{\neg}). \end{aligned}$$

Sei $y \in d$. Dann ist $\langle y, q \rangle \in d \times C$, also $q \Vdash^* (y \in d \times C)$.

Wähle $r \geq q$ mit den Eigenschaften in (1).

$r \Vdash^* (y \in d \times C)$, also nach (1):

$$(2) \quad \begin{aligned} & \exists x \exists s \geq r (s \Vdash^* (\underline{x} \in c \times C) \wedge s \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, y, f)}^{\neg} \wedge \\ & \wedge s \Vdash^* \overline{\forall z (B(\underline{x}, z, f) \rightarrow z = y)}^{\neg}). \end{aligned}$$

Aus $s \Vdash^* (\underline{x} \in c \times C)$ folgt: es gibt $x', s_2 \leq s$ mit $\langle x', s_2 \rangle \in c \times C$

und $s \Vdash^* (\underline{x} = \underline{x}')$. Also $x' \in c$. Mit 1.5.3 und (2):

$$s \Vdash^* (\underline{x}' \in c \times C), \quad s \Vdash^* \overline{B(\underline{x}', y, f)}^{\neg}, \quad s \Vdash^* \overline{\forall z (B(\underline{x}', z, f) \rightarrow z = y)}^{\neg}.$$

Nach 1.4.4 ex. $s_1 \geq s$, das diese Aussagen stark erzwingt,

d.h. insgesamt:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \text{Zu } y \in d \text{ ex. } x' \in c \text{ mit } D(x', y), \text{ wobei } D(x', y) \text{ die} \\ & \text{Formel } \exists s_1 \geq q (s_1 \Vdash^* (\underline{x}' \in c \times C) \wedge s_1 \Vdash^* \overline{B(\underline{x}', y, f)}^{\neg} \wedge \\ & \wedge \forall z \forall s_2 \geq s_1 \exists s_3 \geq s_2 (s_3 \Vdash^* \overline{B(\underline{x}', z, f)}^{\neg} \vee s_3 \Vdash^* (\underline{z} = y)))^{\neg}. \end{aligned}$$

Für $x \in c$ sei $d_x := \{y: y \in d \wedge D(x, y)\}$.

Nach dem Vorangehenden gilt: $d = \bigcup \{d_x: x \in c\}$. Sei $x \in c$.

Wähle mit AC zu $y \in d_x$ ein $r_y \geq q$, das (3) erfüllt.

Seien $y, z \in d_x$, $t := r_y \cup r_z$.

Ann.: $t \in C$, so folgt mit (3) und $t \geq r_y$, $t \geq r_z$:

$$t \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, y, f)}^{\neg} \text{ und } t \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, z, f)}^{\neg}. \text{ Wiederum nach (3) gilt:}$$

es gibt $s_3 \geq t$ mit $s_3 \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, z, f)}^{\neg}$ oder $s_3 \Vdash^* (\underline{z} = y)$.

Da $s_3 \geq t$ und $t \Vdash^* \overline{B(\underline{x}, z, f)}^{\neg}$, folgt $s_3 \Vdash^* (\underline{z} = y)$.

Da $y, z \in d$ und d separiert ist, folgt $z = y$. Insbesondere:

(4) Ist $r_y = r_z$, so ist $r_y \cup r_z \in C$, also gilt $y = z$.

(5) Ist $r_y \cup r_z \in C$, so gilt $y = z$, also $r_y = r_z$.

Aus (5) folgt: ist $r_y \neq r_z$, so gilt $\neg \text{Vtr}(r_y, r_z)$, also

ist nach Lemma 5.1 $\{r_y : y \in d_x\}$ abzählbar. Mit (4)

folgt: d_x ist abzählbar. Dies gilt für alle $x \in c$.

Damit gilt: $|d| = |U\{d_x : x \in c\}| \leq |c| \cdot \aleph_0 = |c|$, da nach

Voraussetzung $\aleph_0 \leq |c|$. Dies war zu zeigen.

5.3 Wir haben bisher gezeigt (siehe 1.5.5 und §1 - §4): Zu jedem

Beweis einer Formel A in ZFC läßt sich in primitiv-rekursiver

Weise der Beweis einer Formel in ZFC angeben, die die Gestalt

$\forall p \in C(p \Vdash_m \overline{A})$ hat (wobei A geschlossene Formel).

Mit den Bezeichnungen aus 3.1 gilt:

$\vdash_{ZF} \forall x(D(x) \rightarrow \forall z(Z(z) \rightarrow z \in x))$ und

$\vdash_{ZF} \forall x(D(x) \rightarrow \forall y \forall z(z \in x \wedge \text{Nf}(z, y) \rightarrow y \in x))$.

Ferner folgt mit dem Fundierungsaxiom:

$\vdash_{ZF} \forall x \forall w(\exists z(z \in w \wedge z \notin x) \rightarrow \exists z(z \in w \wedge z \notin x \wedge \forall u(u \in w \wedge u \in z \rightarrow u \in x)))$.

Wir wollen die Herleitungen dieser Formeln nicht explizit ange-

ben (sie seien mit F_1 , F_2 und F_3 abgekürzt). Auf jeden Fall

finden wir nach Vorbemerkung eine natürliche Zahl m und einen

Beweis in ZFC der folgenden Formel:

(1) $\forall p \in C(p \Vdash_m \overline{F_1 \wedge F_2 \wedge F_3})$.

Lemma: $\forall x \forall p \in C(p \Vdash_m \overline{D(x)} \leftrightarrow p \Vdash_m (x = \hat{Q}))$.

Beweis: Sei $x \in V$, $p \in C$ und es gelte $p \Vdash_m \overline{D(x)}$.

Nach 3.4 gilt:

(2) $\forall q \in C(q \Vdash \overline{Z(\hat{Q})})$ (da $\hat{Q} = 0$) und

(3) $\forall q \forall \alpha \in \omega(q \Vdash \overline{\text{Nf}(\hat{Q}, \alpha+1)})$.

Mit (1) folgt:

$$(4) \quad p \Vdash \overline{Z(\hat{0})} \rightarrow \hat{0} \in \underline{x} \quad \text{und}$$

$$(5) \quad \forall \alpha \in \omega \quad (p \Vdash \overline{\hat{\alpha} \in \underline{x} \wedge \text{Nf}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha+1})} \rightarrow \hat{\alpha+1} \in \underline{x}).$$

Ferner gilt nach (1):

$$(6) \quad p \Vdash \overline{\exists z(z \in \hat{0} \wedge z \notin \underline{x})} \rightarrow \exists z(z \in \hat{0} \wedge z \notin \underline{x} \wedge \forall u(u \in \hat{0} \wedge u \in z \rightarrow u \in \underline{x}))^{\neg}.$$

Ann.: $\neg(p \Vdash \overline{\forall z(z \in \hat{0} \rightarrow z \in \underline{x})})$, d.h.

$$\neg(p \Vdash \overline{\neg \exists z(z \in \hat{0} \wedge z \notin \underline{x})}).$$

Dann gibt es $q \geq p$ mit $q \Vdash^* \overline{\exists z(z \in \hat{0} \wedge z \notin \underline{x})}$.

Wegen (6) gibt es $r \geq q$ mit:

$$r \Vdash^* \overline{\exists z(z \in \hat{0} \wedge z \notin \underline{x} \wedge \forall u(u \in \hat{0} \wedge u \in z \rightarrow u \in \underline{x}))^{\neg}}.$$

Also gibt es ein $z \in V$ mit (7):

$$r \Vdash (\underline{z} \in \hat{0}), \quad r \Vdash (\underline{z} \notin \underline{x}), \quad \text{für alle } u: \quad r \Vdash \overline{u \in \hat{0} \wedge u \in \underline{z} \rightarrow u \in \underline{x}}.$$

Nach 1.4.4 gibt es $r_1 \geq r$ mit $r_1 \Vdash^*(\underline{z} \in \hat{0})$ und $r_1 \Vdash^*(\underline{z} \notin \underline{x})$,

also ex. z' , $t \leq r_1$ mit $\langle z', t \rangle \in \hat{0}$ und $r_1 \Vdash^*(\underline{z} = \underline{z}')$.

Es folgt: es ex. $\alpha \in \omega$ mit $z' = \hat{\alpha}$.

$\hat{\alpha} \neq 0$, da sich sonst mit $r_1 \Vdash \overline{Z(\hat{0})}$ und $r_1 \Vdash \overline{Z(\hat{0})} \rightarrow \hat{0} \in \underline{x}$

(wegen (2), (4) und $r_1 \geq p$) ein Widerspruch zu $r_1 \Vdash^*(\underline{z} \notin \underline{x})$

und $r_1 \Vdash^*(\underline{z} = \underline{z}')$ ergäbe.

Also ex. $\sigma \in \omega$ mit $\alpha = \sigma+1$. Zu $\hat{\sigma}$ gibt es nach (7) $r_2 \geq r_1$ mit

$$r_2 \Vdash^* \overline{(\hat{\sigma} \in \hat{0} \wedge \hat{\sigma} \in \underline{z}) \vee \hat{\sigma} \in \underline{x}}.$$

Es gilt: $\langle \hat{\sigma}, r_2 \rangle \in \hat{0}$ und $\langle \hat{\sigma}, r_2 \rangle \in \hat{\alpha}$, also $r_2 \Vdash^*(\hat{\sigma} \in \hat{0})$ und

$r_2 \Vdash^*(\hat{\sigma} \in \underline{z})$. Mit $z' = \hat{\alpha}$ und $r_1 \Vdash^*(\underline{z} = \underline{z}')$ folgt:

Es ex. $r_3 \geq r_2$ mit $r_3 \Vdash^* \overline{\hat{\sigma} \in \hat{0} \wedge \hat{\sigma} \in \underline{z}}$, also nach (7) und

1.4.1: $r_3 \Vdash^*(\hat{\sigma} \in \underline{x})$. Mit (3) und (5) ex. wegen $r_3 \geq p$ ein $r_4 \geq r_3$

mit $r_4 \Vdash^*(\hat{\alpha} \in \underline{x})$, ein Widerspruch zu $r_4 \geq r_1$, $r_1 \Vdash^*(\underline{z} \notin \underline{x})$,

$r_1 \Vdash^*(\underline{z} = \underline{z}')$ und $z' = \hat{\alpha}$.

Es folgt: $p \Vdash \overline{\forall z(z \in \hat{0} \rightarrow z \in \underline{x})}$.

Mit $p \Vdash \overline{D(\underline{x})}$ und $p \Vdash \overline{\text{Ind}(\underline{\omega})}$ nach 3.4 folgt: zu $q \geq p$ ex.

$r \geq q$ mit $r \Vdash^* \overline{\forall z(z \in \underline{x} \rightarrow z \in \underline{\omega})}$, also $p \Vdash \overline{\forall z(z \in \underline{x} \rightarrow z \in \underline{\omega})}$.

Damit: $p \Vdash \overline{\forall z(z \in \underline{x} \leftrightarrow z \in \underline{\omega})}$, und mit 1.1 folgt

$$p \Vdash (\underline{x} = \underline{\omega}).$$

Gelte umgekehrt $p \Vdash (\underline{x} = \underline{\omega})$, so folgt wegen $p \Vdash \overline{\text{Ind}(\underline{\omega})}$ und

$$1.5.3: p \Vdash \overline{\text{Ind}(\underline{x})}.$$

Analog zum vorangehenden Beweis zeigt man unter Verwendung

von (1): für alle $w \in V$ gilt: $p \Vdash \overline{\text{Ind}(\underline{w}) \rightarrow \forall z(z \in \underline{\omega} \rightarrow z \in \underline{w})}$,

also wieder mit 1.5.3 $p \Vdash \overline{\text{Ind}(\underline{w}) \rightarrow \forall z(z \in \underline{x} \rightarrow z \in \underline{w})}$.

Damit ergibt sich: $p \Vdash \overline{D(\underline{x})}$.

5.4 S sei die Formel

$$\exists a \exists b \exists c (\exists x(x \in a) \wedge a \subset b \wedge D(c) \wedge \forall x(x \in b \rightarrow x \subseteq c) \wedge \neg \text{Sur}(c, a) \wedge \neg \text{Sur}(a, b)).$$

(siehe Einleitung dieses Paragraphen).

Es gilt:

$$\vdash_{\text{ZFC}} S \rightarrow (|c| < |a|) \wedge (|a| < |b|) \wedge (|b| \leq |Pc|) \wedge (|c| = \aleph_0), \text{ also}$$

$$\vdash_{\text{ZFC}} S \rightarrow \aleph_0 < |a| < 2^{\aleph_0}, \text{ also}$$

$$\vdash_{\text{ZFC}} S \rightarrow \neg \text{CH}.$$

Wir zeigen: Ist $n := \max(\text{Rg}^*(S), m)$ (die Definition von m erfolgte in 5.3), so können wir eine Herleitung in ZFC angeben für

$\forall p \in C(p \Vdash_n \overline{S})$. Dazu genügt es, eine Herleitung anzugeben für

$$\forall p \in C(p \Vdash_n^* \overline{S}).$$

Sei also $p \in C$.

Für $\sigma < \aleph_2$ sei $N(\sigma) := \{ \langle \hat{\alpha}, q \rangle : q \in C \wedge \alpha \in \omega \wedge q(\alpha, \sigma) = i \}$

(dabei ist $q(\alpha, \sigma) := q(\langle \alpha, \sigma \rangle)$).

$$a_1 := \{ N(\sigma) : \sigma < \aleph_1 \}, \quad b_1 := \{ N(\sigma) : \sigma < \aleph_2 \},$$

$$a := a_1 \times C, \quad b := b_1 \times C, \quad c := \hat{\omega}.$$

Mit $p \Vdash_n \overline{D(\underline{c})} \leftrightarrow p \Vdash_n (\underline{c} = \underline{\hat{\omega}})$ und wegen $p \Vdash^* (\underline{\hat{\omega}} = \underline{\hat{\omega}})$ reduziert sich

die Behauptung mit 1.5.3 auf die Konjunktion der folgenden Aussagen:

- (1) $p \Vdash \exists x(x \in \underline{a})$
- (2) $p \Vdash \overline{\forall z(z \in \underline{a} \rightarrow z \in \underline{b})}$
- (3) $p \Vdash \overline{\forall x(x \in \underline{b} \rightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in \widehat{\underline{a}}))}$
- (4) $p \Vdash \overline{\neg \text{Sur}(\widehat{\underline{a}}, \underline{a})}$
- (5) $p \Vdash \overline{\neg \text{Sur}(\underline{a}, \underline{b})}$.

5.5 Zu (1): Es gilt $\langle N(0), p \rangle \in \underline{a}$, also nach 1.5.4 $p \Vdash^* (\underline{N(0)} \in \underline{a})$, also $p \Vdash^* \exists x(x \in \underline{a})$, damit $p \Vdash \exists x(x \in \underline{a})$.

Zu (2): Es gilt $\underline{a} \subseteq \underline{b}$. Nach 1.5.4 folgt:

$$p \Vdash \overline{\forall z(z \in \underline{a} \rightarrow z \in \underline{b})}.$$

Zu (3): Zu zeigen: $\forall x(p \Vdash \underline{x} \notin \underline{b} \vee \forall z(z \in \underline{x} \rightarrow z \in \widehat{\underline{a}}))$.

Sei $x \in V$. Wir wenden 1.4.5 an. Sei also $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* (\underline{x} \in \underline{b})$. Dann gibt es x' , $r' \leq r$ mit $\langle x', r' \rangle \in \underline{b}$ und $r \Vdash^* (\underline{x} = \underline{x'})$.

Es folgt: $x' = N(\sigma)$ für ein $\sigma \in \mathcal{K}_2$. Da $N(\sigma) \subseteq \widehat{\underline{a}}$, gilt nach 1.5.4: $r \Vdash^* \overline{\forall z(z \in \underline{x'} \rightarrow z \in \widehat{\underline{a}})}$. Also ex. nach 1.5.3 $s \geq r$ mit $s \Vdash^* \overline{\forall z(z \in \underline{x} \rightarrow z \in \widehat{\underline{a}})}$. Mit 1.4.5 folgt (3).

5.6 Lemma 1: $\forall r \in C \forall \alpha, \sigma \in \text{On}(\alpha < \sigma \rightarrow \neg(r \Vdash^* (\widehat{\underline{a}} = \widehat{\underline{\sigma}})))$

Beweis: Durch Induktion nach σ . Seien $r \in C$ und $\alpha, \sigma \in \text{On}$.

Da $\alpha < \sigma$, gilt $\langle \widehat{\underline{\alpha}}, r \rangle \in \widehat{\underline{\sigma}}$ nach Def. von $\widehat{\underline{\sigma}}$. Es folgt:

$$r \Vdash^* (\widehat{\underline{\alpha}} \in \widehat{\underline{\sigma}}).$$

Ann.: $r \Vdash^* (\widehat{\underline{\alpha}} = \widehat{\underline{\sigma}})$, so ex. nach 1.5.3 ein $s \geq r$ mit $s \Vdash^* (\widehat{\underline{\alpha}} \in \widehat{\underline{\alpha}})$.

Also gibt es x , $s' \leq s$ mit $\langle x, s' \rangle \in \widehat{\underline{\alpha}}$ und $s \Vdash^* (\widehat{\underline{\alpha}} = \underline{x})$.

Es folgt: $x = \widehat{\underline{\tau}}$ mit $\tau < \alpha$, also $s \Vdash^* (\widehat{\underline{\tau}} = \widehat{\underline{\alpha}})$ mit

$\tau < \alpha < \sigma$, ein Widerspruch zur Ind.-Vor. .

Folgerung: Durch Kontraposition folgt mit 1.5.3:

$$\forall r \in C \forall \alpha, \sigma \in \text{On}(r \Vdash^* (\widehat{\underline{\alpha}} = \widehat{\underline{\sigma}}) \rightarrow \alpha = \sigma).$$

Lemma 2: $\forall r \in C \forall \sigma, \tau \in \mathcal{N}_2 (r \Vdash^* (\underline{N(\sigma)} = \underline{N(\tau)}) \rightarrow \sigma = \tau)$

Beweis: Seien $\sigma, \tau \in \mathcal{N}_2$, $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* (\underline{N(\sigma)} = \underline{N(\tau)})$.

Ann.: $\sigma \neq \tau$. Da r endlich ist, gibt es $\alpha \in \omega$, so daß für alle $\mathfrak{f} \in \mathcal{N}_2$: $\langle \alpha, \mathfrak{f} \rangle \notin D(r)$. Also gibt es $q \geq r$, $q \in C$ mit $\langle \alpha, \tau \rangle \in D(q)$, $\langle \alpha, \sigma \rangle \in D(q)$, $q(\alpha, \tau) = 1$, $q(\alpha, \sigma) = 0$.

Nach Def. gilt $\langle \hat{\alpha}, q \rangle \in N(\tau)$, also $q \Vdash^* (\hat{\alpha} \in \underline{N(\tau)})$. Mit $q \geq r$ und 1.5.3 ex. $s \geq q$ mit $s \Vdash^* (\hat{\alpha} \in \underline{N(\sigma)})$, d.h. es gibt $x, s' \leq s$ mit $\langle x, s' \rangle \in N(\sigma)$ und $s \Vdash^* (\hat{\alpha} = \underline{x})$. Es folgt: es ex. $k \in \omega$ mit $x = \hat{k}$ und $s'(k, \sigma) = 1$. Da $s' \leq s$, gilt $s(k, \sigma) = 1$.

Aus $s \Vdash^* (\hat{\alpha} = \underline{k})$ folgt mit Lemma 1: $\alpha = k$. Also $s(\alpha, \sigma) = 1$.

Dies ist ein Widerspruch zu $s \geq q$ und $q(\alpha, \sigma) = 0$.

Corollar: a_1 und b_1 sind separiert. Ferner folgt: sind $\sigma, \tau \in \mathcal{N}_2$,

so folgt aus $\tau \nVdash \sigma: N(\tau) \nVdash N(\sigma)$; das bedeutet $|a_1| = \mathcal{N}_1$

und $|b_1| = \mathcal{N}_2$.

5.7 Beweis der Aussagen (4) und (5) aus 5.5:

Ann.: $\neg(p \Vdash \neg \text{Sur}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{a}}))$. Dann gilt insbesondere

$\neg(p \Vdash^* \neg \text{Sur}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{a}}))$, also ex. $q \geq p$ mit $q \Vdash^* \neg \text{Sur}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{a}})$.

Es gilt $a = a_1 \times C$, $\hat{a} = \{\hat{\alpha}: \alpha \in \omega\} \times C$. Da $\{\hat{\alpha}: \alpha \in \omega\} = \mathcal{N}_0$

(dies folgt unmittelbar aus Lemma 1 in 5.6) und a_1

separiert ist nach 5.6, folgt aus Lemma 5.2: $|a_1| \leq \mathcal{N}_0$.

Dies ist ein Widerspruch zum Corollar in 5.6.

Ganz analog zeigt man $p \Vdash \neg \text{Sur}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{b}})$. Damit ist die Behauptung in 5.4 vollständig bewiesen.

5.8 Hauptsatz: Ist ZF widerspruchsfrei, so auch ZFC + $\neg \text{CH}$.

Beweis: Ann.: ZFC + $\neg \text{CH}$ ist widerspruchsvoll. Dann gibt es

eine endliche Folge von Formeln dieses Systems, die ein

Beweis der Formel $\exists v_0 (v_0 = v_0 \wedge v_0 \nVdash v_0)$ ist.

Die in der Einleitung zu Kapitel 2 genannte Theorie T ist Erweiterung von $ZFC + \neg CH$, also gibt es eine endliche Folge von Formeln von T , die ein Beweis für $\exists v_0 (v_0 = v_0 \wedge v_0 \nVdash v_0)$ ist. Mit den Ergebnissen dieses Kapitels und 1.5.6 folgt die Behauptung.

Kapitel 3: Die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms

Der mathematische Hintergrund des Beweises der relativen Unabhängigkeit des Auswahlaxioms wird bestimmt durch die Methode der Fraenkel-Mostowski-Specker Modelle (siehe Felgner[5], S.46ff, Jech[11], S.122ff und eine Bemerkung von Scott in [18], S.78). Wir wollen die Grundidee kurz skizzieren. Man nehme zur Sprache von ZF zwei Konstantensymbole 0^* und a hinzu (die leere Menge und die Menge aller "Atome"), ferner zur Menge der Axiome die Axiome $\neg \exists x (x \in 0^*)$ und $\forall z (z \in a \leftrightarrow z \neq 0^* \wedge \neg \exists x (x \in z))$. Das Extensionalitätsaxiom werde abgeändert zu $\forall x \forall y (x \neq a \wedge y \neq a \rightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y))$, $(Ax2)-(Ax7)$ bleiben unverändert. Das entstehende System nennen wir ZFa. Nun definiere man wie in 1.1.9 die von-Neumannschen Stufen, nur sei $V_0 := a$. Die so entstehende Klasse sei $V(a)$. Jede Permutation von a induziert mit Hilfe der Rangfunktion ("Rang" bzgl. $V(a)$ werde analog zu 1.1.9 definiert) einen ϵ -Automorphismus von $V(a)$. Ist G die Gruppe der Permutationen von a , so heiße F ein normaler Filter auf G , falls gilt:

(1) $G \in F$; (2): $K \in F \wedge K \subseteq H \rightarrow H \in F$; (3) $H, K \in F \rightarrow H \cap K \in F$;

(4) $\pi \in G \wedge H \in F \rightarrow \pi H \pi^{-1} \in F$ und (5) $e \subseteq a \wedge |e| < \aleph_0 \rightarrow H_e \in F$, wobei $H_e := \{ \pi \in G : \forall z \in e (\pi(z) = z) \}$. Ein $x \in V(a)$ heiße symmetrisch, wenn $\{ \pi \in G : \pi(x) = x \}$ Element von F ist, erblich symmetrisch, wenn jedes Element der transitiven Hülle von $\{x\}$ symmetrisch ist. Es sei $HS^* := \{z : z \text{ ist erblich symmetrisch} \}$. Dann gilt: HS^* ist Modell von ZFa, $a \in HS^*$, $V \subset HS^*$. Durch geeignete Wahl des Filters F erhält man einen Beweis für den Satz: ist ZFa konsistent, so auch ZFa + Negation des Auswahlaxioms.

Unsere Beweisführung folgt Cohen[4], überträgt einige Vereinfachungen aus Shoenfield[20] und verläuft ähnlich zu der oben angedeuteten Methode.

Die Menge der Bedingungen sei

$C := \{x: \text{Fkt}(x) \wedge D(x) \subseteq \omega \times \omega \wedge W(x) \subseteq \{0,1\} \wedge |x| < \aleph_0\}$. C ist durch die Inklusion halbgeordnet. P sei die Menge der Permutationen von ω . Jedes $f \in P$ induziert einen ordnungstreu Isomorphismus von C auf C (siehe 1.2). Für $\alpha \in \omega$ bezeichnen wir mit P_α die Menge der Permutationen, die auf $\{0, \dots, \alpha\}$ konstant sind. (Die Menge $\{P_\alpha: \alpha \in \omega\}$ bildet eine Filterbasis). Wir definieren zu jedem $f \in P$ eine Abbildung H_f (siehe 1.3). $x \in V$ heiße symmetrisch, wenn ein $\alpha \in \omega$ so existiert, daß $H_f(x) = x$ fur alle $f \in P_\alpha$. Induktiv definiert heiße x erblich symmetrisch ($HS(x)$), wenn x symmetrisch ist und alle $y \in D(x)$ erblich symmetrisch sind. Unsere Formel K wählen wir dann als $K(x): \leftrightarrow HS(x)$. Das Analogon zu " HS^* ist ein Modell von ZFa" ist die Tatsache, daß alle Axiome von ZF K -erzwungen werden; das Analogon zu "Jedes $\pi \in G$ induziert einen Automorphismus von $V(a)$ " ist das Symmetriema in 2.1. Und unsere Filterbasis $\{P_\alpha: \alpha \in \omega\}$ entspricht schließlich der Wahl des Filters bei der Fraenkel-Mostowski-Methode, durch die man ein Modell erhält, in dem das Auswahlaxiom falsch ist. Die Beweise werden wie in Kapitel 2 informal geführt, können aber alle in ZFC formalisiert werden.

§ 1 Symmetrische Mengen

1.1 Def.: $P(x): \leftrightarrow \text{Fkt}(x) \wedge \text{Bij}(x) \wedge D(x) = \omega \wedge W(x) = \omega$

(x ist Permutation von ω).

$P := \{z: P(z)\}$. Elemente aus P teilen wir mit durch $f, g, \dots$, auch mit Indizes.

Fur $f, g \in P$ sei $f \circ g \in P$ definiert durch: $f \circ g(\alpha) := f(g(\alpha))$ fur alle $\alpha \in \omega$. I sei die identische Abbildung von ω auf ω , f^+ die inverse Abbildung zu $f \in P$.

Def.: $f \in P$ heiße α -Permutation ($\alpha \in \omega$) g.d.w. $f(\sigma) = \sigma$ fur alle $\sigma \leq \alpha$. $P_\alpha := \{z: z \text{ } \alpha\text{-Permutation}\}$.

Bemerkung: Es gilt $P_\alpha \cap P_\sigma = P_{\min\{\alpha, \sigma\}}$, d.h. zusammen mit der Tatsache, daß jedes P_α Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist: $\{P_\alpha : \alpha \in \omega\}$ ist Filterbasis.

1.2 Def.: Für $f \in P$ und $p \in C$ sei

$$\pi(f, p) := \pi_f(p) := \{\langle \alpha, f(\sigma), i \rangle : \langle \alpha, \sigma, i \rangle \in p\}.$$

Lemma: $\pi_{f \cdot g}(p) = \pi_f(\pi_g(p))$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \pi_{f \cdot g}(p) &= \{\langle \alpha, f(g(\sigma)), i \rangle : \langle \alpha, \sigma, i \rangle \in p\} = \\ &= \{\langle \alpha, f(\sigma'), i \rangle : \langle \alpha, \sigma', i \rangle \in \pi_g(p)\} = \pi_f(\pi_g(p))! \end{aligned}$$

Lemma: Für $f \in P$ ist π_f bijektive ordnungstreue Abbildung von C auf C .

Beweis: Sei $p \in C$. Nach Lemma gilt $p = \pi_f(\pi_f(p))$, ferner

ist π_f injektiv. Aus $p \leq s$ (d.h. $p \subseteq s$) folgt nach Def.

$$\pi_f(p) \subseteq \pi_f(s), \text{ umgekehrt folgt aus } \pi_f(p) \subseteq \pi_f(s)$$

$$\pi_f(\pi_f(p)) \subseteq \pi_f(\pi_f(s)), \text{ d.h. } p \leq s.$$

1.3 Durch transfinite Rekursion nach $r(x)$ definieren wir:

Def.: $H_f(x) := \{\langle H_f(y), \pi_f(p) \rangle : \langle y, p \rangle \in x\}$

Lemma: $H_{f \cdot g}(x) = H_f(H_g(x))$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } &\text{Durch transfinite Induktion nach } r(x). \quad H_{f \cdot g}(x) = \\ &= \{\langle H_{f \cdot g}(y), \pi_{f \cdot g}(p) \rangle : \langle y, p \rangle \in x\} \\ &= \{\langle H_f(H_g(y)), \pi_f(\pi_g(p)) \rangle : \langle y, p \rangle \in x\} \text{ nach 1.2 und Induk-} \\ &\text{tionsvoraussetzung. Hieraus ergibt sich leicht die Beh.} \end{aligned}$$

1.4 Def.: $\text{Sym}(x) := \leftrightarrow \exists \alpha \in \omega \forall f \in P_\alpha (H_f(x) = x)$

(x ist symmetrisch).

Bemerkung: Aus $\text{Sym}(x)$ folgt $H_I(x) = x$, da $I \in P_\alpha$ f.a. $\alpha \in \omega$.

Lemma: $\text{Sym}(x) \wedge f \in P \rightarrow \text{Sym}(H_f(x))$

Beweis: Es ex. $\alpha \in \omega$, so daß für alle $g \in P_\alpha$: $H_g(x) = x$.

Sei $\alpha' \in \omega$ so gewählt, daß $f(\sigma) \leq \alpha'$ für alle $\sigma \leq \alpha$. Dann gilt:

$f \circ g \cdot f \in P_\alpha$ für jedes $g \in P_\alpha$. . Damit folgt mit 1.3:

$x = H_f \circ g \cdot f(x) = H_f \circ (H_g(H_f(x)))$, also $H_f(x) = H_g(H_f(x))$ für alle Permutationen $g \in P_\alpha$.

1.5 Wir können jetzt unsere Formel $K(x)$ definieren. Durch transfinite Rekursion nach $r(x)$ definieren wir:

Def.: $HS(x) : \leftrightarrow \text{Sym}(x) \wedge \forall y (y \in D(x) \rightarrow HS(y))$

(x ist erblich symmetrisch).

Def.: $K(x) : \leftrightarrow HS(x)$.

Lemma: $K(x) \wedge f \in P \rightarrow K(H_f(x))$

Beweis: Durch Induktion nach $r(x)$. Gelte $K(x)$, sei $f \in P$.

Nach 1.4 gilt: $\text{Sym}(H_f(x))$.

Sei $y \in D(H_f(x))$, so ist $y = H_f(z)$ mit $z \in D(x)$. Es folgt nach Definition von $K(x)$: $K(z)$, also nach Induktionsvoraussetzung: $K(y)$. Damit gilt $K(H_f(x))$.

1.6 Lemma: (i) $\text{Sym}(x) \rightarrow W(x) \subseteq C$

(ii) $\text{Sym}(x) \wedge y \in D(x) \wedge f \in P \rightarrow H_f(y) \in D(H_f(x))$.

Beweis: Zu (i): Aus $\text{Sym}(x)$ folgt: es gibt $\alpha \in \omega$, so daß für alle $f \in P_\alpha$: $H_f(x) = x$. Da nach Definition von H_f $W(H_f(x)) \subseteq C$, gilt $W(x) \subseteq C$.

Zu (ii): Sei $y \in D(x)$, $f \in P$. Wegen (i) und $\text{Sym}(x)$ gibt es $s \in C$, so daß $\langle y, s \rangle \in x$. Also $\langle H_f(y), \pi_f(s) \rangle \in H_f(x)$, d.h. $H_f(y) \in D(H_f(x))$.

§ 2 Das Symmetriema

2.1 Symmetriema: Ist A eine Formel mit genau den freien Variablen

$v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ und gilt $Rg^*(A) = m$ (wobei $Rg^*(A) = 0$, falls A atomar oder Negation einer atomaren Formel ist, $Rg^*(A) = Rg(A)$ sonst), so gilt

$$\vdash_{ZF} \forall x_1, \dots, x_n \in K \forall p \in C \forall f \in P (p \Vdash_m^* \overline{A(x_1, \dots, x_n)} \leftrightarrow \pi_f(p) \Vdash_m^* \overline{A(\underline{H}_f(x_1), \dots, \underline{H}_f(x_n))}).$$

Beweis: Durch metasprachliche Induktion nach m.

I. $m = 0$

Sei $x, y \in K$, $p \in C$, $f \in P$. Dann ist $\overline{A(x, y)} \in QK$.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der fundierten Relation R_0 (siehe 1.3.3).

1. Fall: $\overline{A(x, y)} = (x \in y)$.

$$p \Vdash^*(x \in y) \leftrightarrow \exists z \in K \exists s \leq p (\langle z, s \rangle \in y \wedge p \Vdash^*(x = z)).$$

Nach Ind.-Vor. gilt: $p \Vdash^*(x = z) \leftrightarrow \pi_f(p) \Vdash^*(\underline{H}_f(x) = \underline{H}_f(z))$,

ferner nach Def. 1.3: $\langle z, s \rangle \in y \leftrightarrow \langle H_f(z), \pi_f(s) \rangle \in H_f(y)$,

also gilt

$$(*) \quad p \Vdash^*(x \in y) \leftrightarrow \exists z \in K \exists s \leq p (\langle H_f(z), \pi_f(s) \rangle \in H_f(y) \wedge \pi_f(p) \Vdash^*(\underline{H}_f(x) = \underline{H}_f(z))).$$

Nun gilt nach 1.2 $s \leq p \leftrightarrow \pi_f(s) \leq \pi_f(p)$, ferner ist nach 1.5

mit $z \in K$ auch $H_f(z) \in K$, also folgt aus (*):

$$(**) \quad \exists z' \in K \exists s' \leq \pi_f(p) (\langle z', s' \rangle \in H_f(y) \wedge \pi_f(p) \Vdash^*(\underline{z'} = \underline{H}_f(x))),$$

d.h. $\pi_f(p) \Vdash^*(\underline{H}_f(x) \in \underline{H}_f(y))$.

Gelte umgekehrt (**). Aus $\langle z', s' \rangle \in H_f(y)$ folgt: es gibt

$\langle z, s \rangle \in y$ mit $z' = H_f(z)$, $s' = \pi_f(s)$. Da $z' \in K$, gilt mit $H_f(z') = z$

(nach 1.3) und wegen 1.5 auch $z \in K$. Da $s' \leq \pi_f(p)$, folgt $s \leq p$.

Schließlich gilt nach Ind.-Vor. $p \Vdash^*(x = z)$, also insgesamt

$$p \Vdash^*(x \in y).$$

2. Fall: $\overline{A(x,y)} = (x \neq y)$

$p \Vdash^* (x \neq y) \leftrightarrow \neg \exists q \geq p (q \Vdash^* (x \in y))$

(*) $\leftrightarrow \neg \exists q \geq p (\pi_f(q) \Vdash^* (H_f(x) \in H_f(y)))$ (nach Ind.-Vor.)
 $\rightarrow \neg \exists q \geq \pi_f(p) (q \Vdash^* (H_f(x) \in H_f(y)))$

da sonst $\pi_f(q) \geq p$, $\pi_f(\pi_f(q)) = q$, $\pi_f(\pi_f(q)) \Vdash^* (H_f(x) \in H_f(y))$.

Gelte $\pi_f(p) \Vdash^* (H_f(x) \notin H_f(y))$. Aus der Ann.: es gibt $q \geq p$ mit

$\pi_f(q) \Vdash^* (H_f(x) \in H_f(y))$ (siehe (*)) folgt mit $\pi_f(q) \geq \pi_f(p)$

direkt ein Widerspruch.

3. Fall: $\overline{A(x,y)} = (x = y)$.

Der Beweis verläuft analog zu Fall 2.

4. Fall: $\overline{A(x,y)} = (x \vdash y)$.

Es gelte $p \Vdash^* (x \vdash y)$.

O.w.E. existieren $z \in K$ und $s \leq p$ mit $\langle z, s \rangle \in y$ und $p \Vdash^* (z \notin x)$.

Nach Ind.- Vor.: $\pi_f(p) \Vdash^* (H_f(z) \notin H_f(x))$,

ferner $\pi_f(s) \leq \pi_f(p)$ und $\langle H_f(z), \pi_f(s) \rangle \in H_f(y)$, d.h.

$\pi_f(p) \Vdash^* (H_f(x) \vdash H_f(y))$.

Die Umkehrung verläuft analog.

II. Die Behauptung gelte für $m=1$.

Seien $x_1, \dots, x_n \in K$, $f \in P$ und $p \in C$.

II.1: $A(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$ sei von der Form $\neg B(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$.

Für diesen Fall erfolgt der Beweis analog zu I., Fall 2.

II.2: $A(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$ sei von der Form $B(v_{k_1}, \dots, v_{k_n}) \vee$

$\vee D(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$. Mit

$p \Vdash_{m+1}^* \overline{B \vee D} \leftrightarrow p \Vdash_m^* \overline{B} \vee p \Vdash_m^* \overline{D}$ ergibt sich der Beweis unmittelbar aus der Ind.-Vor. .

II.3: $A(v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$ sei von der Form $\exists v_{k_0} B(v_{k_0}, v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$.

$$\begin{aligned} p \Vdash_{m+1}^* \overline{A(x_1, \dots, x_n)} &\leftrightarrow \exists x_0 \in K(p \Vdash_m^* \overline{B(x_0, x_1, \dots, x_n)}) \\ &\leftrightarrow \exists x_0 \in K(\pi_f(p) \Vdash_m^* \overline{B(H_f(x_0), \dots, H_f(x_n))}) \end{aligned}$$

nach Def. 3.5 und Ind.-Vor. .

Aus $x_0 \in K$ folgt $H_f(x_0) \in K$, also folgt:

$$(*) \quad \exists x'_0 \in K(\pi_f(p) \Vdash_m^* \overline{B(x'_0, H_f(x_1), \dots, H_f(x_n))}) ,$$

$$\text{d.h. } \pi_f(p) \Vdash_{m+1}^* \overline{A(H_f(x_1), \dots, H_f(x_n))} .$$

Gilt umgekehrt (*), so setze $x := H_f(x'_0)$ und verwende

$$x'_0 = H_f(H_f(x)) !$$

Damit ist Lemma 2.1 vollständig bewiesen.

2.2 Def.: $H(x) := U\{H_f(x) : f \in P\}$

(die symmetrische Hülle von x).

Lemma: $H(x)$ ist symmetrisch.

Beweis: Sei $g \in P$, $y \in H_g(H(x))$. Dann ist $y = \langle H_g(z), \pi_g(p) \rangle$

mit $\langle z, p \rangle \in H(x)$, also ex. $f \in P$ mit $\langle z, p \rangle \in H_f(x)$, d.h.

$$\langle z, p \rangle = \langle H_f(z'), \pi_f(p') \rangle \text{ mit } \langle z', p' \rangle \in x. \text{ Es folgt:}$$

$$y = \langle H_g(H_f(z')), \pi_g(\pi_f(p')) \rangle \text{ mit } \langle z', p' \rangle \in x, \text{ also}$$

$$y \in H_{g \circ f}(x), \text{ d.h. } y \in H(x).$$

Sei umgekehrt $y \in H(x)$, d.h. es existieren $f \in P$, $\langle z, p \rangle \in x$

$$\text{mit } y = \langle H_f(z), \pi_f(p) \rangle . \text{ Sei } z' := H_{g \circ f}(z), p' := \pi_{g \circ f}(p) ,$$

$$\text{so gilt } y = \langle H_g(z'), \pi_g(p') \rangle \text{ und } \langle z', p' \rangle \in H_{g \circ f}(x), \text{ also}$$

$$\langle z', p' \rangle \in H(x), y \in H_g(H(x)). \text{ Damit gilt insgesamt:}$$

$$\forall g \in P(H_g(H(x)) = H(x)), \text{ d.h. } \text{Sym}(H(x)).$$

2.3 Lemma: $\forall z[\forall y(y \in D(z) \rightarrow K(y)) \rightarrow K(H(z))]$

Beweis: Sei $z \in V$ und es gelte für z die Voraussetzung des Lemmas. In 2.2 wurde gezeigt: $\text{Sym}(H(z))$.

Sei $x \in D(H(z))$. Dann ex. $f \in P$ mit $x \in D(H_f(z))$, also $x = H_f(y)$ für ein $y \in D(z)$. Nach Vor. folgt $K(y)$, mit 1.5 gilt $K(H_f(y))$, also $K(x)$. Nach Def. von K folgt die Behauptung.

2.4 Lemma: Sind $x, x_1, \dots, x_n \in K$, ist A eine ZF-Formel mit genau den

freien Variablen $v_{k_0}, v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ und gilt $\text{Rg}^*(A) = m$,

ist ferner w definiert durch

$$w := \{ \langle z, r \rangle : z \in D(x) \wedge r \Vdash^* (z \in x) \wedge r \Vdash_m^* \overline{A(x, x_1, \dots, x_n)} \},$$

so ist $w \in K$.

Beweis: Da für $z \in D(w)$ folgt: $z \in D(x)$, also $z \in K$, bleibt zu zeigen: $\text{Sym}(w)$.

Da $\text{Sym}(x), \text{Sym}(x_1), \dots, \text{Sym}(x_n)$, ex. nach 1.1 ein $\alpha \in \omega$, so daß für alle $f \in P_\alpha$: $H_f(x) = x$, $H_f(x_i) = x_i$ für $i=1, \dots, n$.

Sei $v = \langle H_f(z), \pi_f(r) \rangle$ mit $\langle z, r \rangle \in w$. Es folgt: $z \in D(x)$ und $r \Vdash^* (z \in x)$ und $r \Vdash_m^* \overline{A(x, x_1, \dots, x_n)}$. Mit 1.6 folgt:

$H_f(z) \in D(H_f(x))$, d.h. $H_f(z) \in D(x)$, mit 2.1:

$\pi_f(r) \Vdash^* (H_f(z) \in x)$ und $\pi_f(r) \Vdash_m^* \overline{A(x, x_1, \dots, x_n)}$, also $v \in w$.

Damit ergibt sich $H_f(w) \subseteq w$.

Sei umgekehrt $\langle z, r \rangle \in w$. Da $z \in K$, gilt $\text{Sym}(z)$, also

$\langle z, r \rangle = \langle H_I(z), \pi_I(r) \rangle = \langle H_{f \circ f^+}(z), \pi_{f \circ f^+}(r) \rangle$. Falls wir

zeigen: $\langle H_{f^+}(z), \pi_{f^+}(r) \rangle \in w$, folgt $\langle z, r \rangle \in H_f(w)$. Da

mit $f \in P_\alpha$ auch $f^+ \in P_\alpha$, folgt wie oben aus $\langle z, r \rangle \in w$:

$H_{f^+}(z) \in D(x)$, $\pi_{f^+}(r) \Vdash^* (H_{f^+}(z) \in x)$, $\pi_{f^+}(r) \Vdash_m^* \overline{A(x, x_1, \dots, x_n)}$,

also $\langle H_{f^+}(z), \pi_{f^+}(r) \rangle \in w$.

Insgesamt folgt $\text{Sym}(w)$ und damit $w \in K$.

§ 3: Erzwingung von $(Ax1)$, $(Ax2)^*$, $(Ax3)^*$, $(Ax4)^*$ und $(Ax7)$.

Als Theorie T in der Sprache von ZF (s. 1.5.6) wählen wir das System ZF^* aus 1.1.11 mit $\neg AC$ als zusätzlichem Axiom. Wir haben gezeigt: ZF^* ist äquivalent zu ZF . Die Wahl von T ist motiviert durch das Symmetriemaß, das häufig angewandt wird und uns einen kurzen Beweis der Erzwingung des Axiomenschemas $(Ax9)$, also der Aussonderungssaxiome, liefert.

3.1 Zu $(Ax1)$: Beim Beweis von $\forall p \in C(p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \neg(Ax1))$ in 2.1.1 wurden keine speziellen Eigenschaften von C und K benutzt, der Beweis läßt sich wörtlich übertragen.

3.2 Zu $(Ax2)^*$: Zu zeigen:

$$\forall p \in C(p \Vdash_5 \neg \forall x \forall y \exists w \forall z (z = x \vee z = y \rightarrow z \in w)).$$

Seien $p \in C$, $x, y \in K$.

$$w_1 := \{x, y\} \times C.$$

Es gilt: für alle $u \in D(w_1)$ folgt: $u \in K$, also gilt nach 2.3:

$$H(w_1) \in K.$$

$$\text{Setze } w := H(w_1).$$

Beh.: Für alle $z \in K$ gilt: $p \Vdash \neg(z = x \vee z = y) \vee z \in w$.

Beweis mit 1.4.5: sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \neg(z = x \vee z = y)$.

O.w.E. gelte $r \Vdash^*(z = x)$. $H_1(x) = x$, ferner gilt:

$$\langle x, r \rangle = \langle H_1(x), \pi_1(r) \rangle \in H_1(w_1), \text{ da } \langle x, r \rangle \in w_1. \text{ Damit ist}$$

$$\langle x, r \rangle \in w.$$

Es folgt: $r \Vdash^*(z \in w)$, mit $r \Vdash^*(z = x)$ also $r \Vdash^*(z \in w)$.

Damit: $p \Vdash \neg \forall z (z = x \vee z = y \rightarrow z \in w)$. Mit 1.4.3 folgt die Behauptung.

3.3 Zu $(Ax3)^*$: Es lautet: $\forall x \exists w \forall z (\exists y (y \in x \wedge z \in y) \rightarrow z \in w)$.

Wir zeigen: Für $x \in K$ und $p \in C$ gilt $p \Vdash_{\mathbb{P}_0}^* \exists w \forall z (\dots)$, d.h.

es gibt ein $w \in K$, so daß für alle $z \in K$:

$$p \Vdash \neg \exists y (y \in \underline{x} \wedge z \in y) \vee z \in \underline{w}.$$

Sei also $x \in K$, $p \in C$.

$$w := \{ \langle z, r \rangle : \exists y (y \in D(x) \wedge z \in D(y) \wedge r \Vdash^* (y \in \underline{x}) \wedge r \Vdash^* (z \in \underline{y})) \}$$

Ist $z \in D(w)$, so gibt es $y \in D(x)$ mit $z \in D(y)$. Mit $x \in K$ folgt: $z \in K$. Genau wie im Beweis von Lemma 2.4 zeigt man:

$\text{Sym}(w)$, damit folgt nach Def. von K : $w \in K$.

Sei $z \in K$, $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \neg \exists y (y \in \underline{x} \wedge z \in y)$.

Nach Def. von $\Vdash^*$ und 1.4.4 gibt es $s \leq r$, $y \in K$ mit $s \Vdash^* (y \in \underline{x})$

und $s \Vdash^* (z \in \underline{y})$. Nach 1.5.4 ex. $y' \in D(x)$ mit $s \Vdash^* (y = \underline{y}')$.

Also ex. nach 1.5.3 $t \leq s$ mit $t \Vdash^* (y' \in \underline{x})$ und $t \Vdash^* (z \in \underline{y}')$.

Wiederum nach 1.5.4 gibt es $z' \in D(y')$ mit $t \Vdash^* (z = \underline{z}')$,

also $t \Vdash^* (z' \in \underline{y}')$. Damit gilt $\langle z', t \rangle \in w$, also $t \Vdash^* (z' \in \underline{w})$,

also $t \Vdash^* (z \in \underline{w})$. Da $t \leq r$, folgt mit 1.4.5:

$$p \Vdash \neg \exists y (y \in \underline{x} \wedge z \in y) \vee z \in \underline{w} \text{ und damit die Behauptung.}$$

Bemerkung: Die Definition von w gestattet uns sogar die Er-

zwingung von $(Ax3)$: Sei $z \in K$, $r \in C$ mit $r \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w})$. Dann

ex. $z' \in K$, $r' \leq r$ mit $\langle z', r' \rangle \in w$ und $r' \Vdash^* (z = \underline{z}')$. Da $\langle z', r' \rangle \in w$,

gibt es $y \in K$ mit $r' \Vdash^* (z' \in \underline{y})$ und $r' \Vdash^* (y \in \underline{x})$, also mit 1.5.3

und 1.4.2: $r \Vdash^* (z \in \underline{y})$ und $r \Vdash^* (y \in \underline{x})$. Nach 1.4.4 ex $s \leq r$ mit

$s \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{y} \wedge y \in \underline{x})$, d.h. $s \Vdash^* \exists y (\underline{z} \in y \wedge y \in \underline{x})$. Mit 1.4.5

folgt $p \Vdash \underline{z} \in \underline{w} \vee \exists y (\underline{z} \in y \wedge y \in \underline{x})$.

3.4 Zu $(Ax4)^*$: $\forall y \exists w \forall x (\forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x \in w)$.

Der Beweis verläuft analog zu 2.1.4. Sei $p \in C$. Wir zeigen:

Für alle $y \in K$ ex. $w \in K$, so daß für alle $x \in K$:

$$p \Vdash \neg \forall z (z \in \underline{x} \rightarrow z \in \underline{y}) \vee \underline{x} \in \underline{w}.$$

Seien $x, y \in K$, sei $r \in C$ mit $r \Vdash^* \forall z (z \in \underline{x} \rightarrow z \in \underline{y})$; d.h. für

alle $z \in K$ $r \Vdash^* \underline{z} \in \underline{x} \vee \underline{z} \in \underline{y}$. Es folgt:

(*) $\forall z \in K \forall s_1 \geq r \exists s_2 s_1 (s \Vdash^* (z \notin \underline{x}) \vee s \Vdash^* (z \in \underline{y}))$.

Setze $x' := \{ \langle z, t \rangle : z \in D(y) \wedge t \Vdash^* (z \in \underline{x}) \wedge t \Vdash^* (z \in \underline{y}) \}$.

Nach Lemma 2.4 gilt: $x' \in K$.

Wie in 2.1.4 zeigt man unter Ausnutzung von (*): $r \Vdash^* (\underline{x} = \underline{x}')$.

Die bisherigen Überlegungen waren unabhängig von w .

Setze $w := H(\{x' : x' \in K \wedge x' \subseteq D(y) \times C\} \times C) =: H(w_1)$.

Es gilt: $\langle x', r \rangle \in w_1$, also $\langle x', r \rangle = \langle H_1(x'), \pi_1(r) \rangle \in w$.

$r \Vdash^* (\underline{x}' \in \underline{w})$ und wegen $r \Vdash^* (\underline{x} = \underline{x}')$: $r \Vdash^* (\underline{x} \in \underline{w})$.

Mit 1.4.5 folgt die Behauptung.

3.5 Zu (Ax7): $\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x)))$.

Zur genauen Formulierung vergleiche wieder mit 2.1.5.

Seien $x \in K$ und $p \in C$. Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \neg \exists y (y \in \underline{x})$.

Dann ex. $y \in K$ mit $r \Vdash^* (y \in \underline{x})$, insbesondere gilt:

$\exists s \geq r (s \Vdash^* (y \in \underline{x}))$. Wie in 2.1.5 erhält man mit (Ax7) die folgende Menge:

$w := \{u \in K : \exists s \geq r (s \Vdash^* (u \in \underline{x})) \wedge \forall z \in K (\exists s \geq r (s \Vdash^* (z \in \underline{x})) \rightarrow \rightarrow r(u) \leq r(z))\}$,

wobei $r(\cdot)$ wieder die Rangfunktion aus 1.1.9 ist.

Nach dem Vorangehenden gilt $w \neq \emptyset$. Sei $u \in w$, d.h. es ex.

$s_0 \geq r$ mit $s_0 \Vdash^* (u \in \underline{x})$.

Ann.: $\neg (s_0 \Vdash^* \neg \exists z (z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x}))$, so gibt es $s_1 \geq s_0$ mit

$s_1 \Vdash^* \neg \exists z (z \in \underline{u} \wedge z \in \underline{x})$. Wie in 2.1.5 zeigt man: es gibt

$z' \in D(u)$ und $s_2 \geq s_1$ mit $s_2 \Vdash^* (z' \in \underline{x})$. Da $z' \in D(u)$, folgt $z' \in K$, da $u \in K$. Aber $r(z') < r(u)$, ein Widerspruch zur

Wahl von u .

Der Rest des Beweises verläuft analog zu 2.1.5.

§ 4: Erzwingung von $(Ax5)^*$, $(Ax9)$ und $(Ax6)$.

4.1 Das Aussonderungsschema lautet: Ist $A(v_0)$ eine ZF-Formel mit genau den freien Variablen $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}, v_0$ ($n \neq 0$), so ist $\forall v_{k_1} \dots \forall v_{k_n} \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$ (wobei w nicht frei in A auftritt) ein Axiom von ZF^* .

O.w.E. sei v_0 einzige freie Variable in A (siehe 2.1).

Sei $m := Rg^*[\forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))]$.

Zu zeigen: $\forall p \in C(p \Vdash_m^* \overline{\forall x \exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))})$.

Sei $x \in K$ und $p \in C$.

Wir zeigen: $p \Vdash^* \overline{\exists w \forall z (z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))}$.

Als kanonische Definition bietet sich an:

$w := \{ \langle z, r \rangle : z \in D(x) \wedge r \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{x}) \wedge r \Vdash^* \overline{A(\underline{z})} \}$.

Für $z \in D(w)$ ist $z \in D(x)$, also $z \in K$. Ferner gilt nach Lemma 2.4 $Sym(w)$, also $w \in K$ nach Def. von K . (Enthält A mehrere freie Variable, so läßt sich Lemma 2.4 ebenfalls anwenden und der Beweis verläuft analog).

Wir wenden 1.4.5 an:

(a) Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \overline{\underline{z} \in \underline{x} \wedge A(\underline{z})}$ ($z \in K$).

Nach 1.4.4 gibt es $s \geq r$ mit $s \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{x})$ und $s \Vdash^* \overline{A(\underline{z})}$; mit 1.5.4 gibt es $z' \in D(x)$ mit $s \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z'})$. Nach 1.5.3 gibt es $t \geq s$ mit $t \Vdash^* (\underline{z'} \in \underline{x})$ und $t \Vdash^* \overline{A(\underline{z'})}$, also $\langle z', t \rangle \in w$.

Es folgt $t \Vdash^* (\underline{z'} \in \underline{w})$, also $t \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w})$. Da $t \geq r$, folgt mit 1.4.5 $p \Vdash^* \overline{(\underline{z} \in \underline{x} \wedge A(\underline{z}))} \vee \underline{z} \in \underline{w}$.

(b) Sei $r \in C$, $z \in K$ und es gelte $r \Vdash^* (\underline{z} \in \underline{w})$. Dann gibt es $z' \in K$, $r' \leq r$ mit $\langle z', r' \rangle \in w$ und $r \Vdash^* (\underline{z} = \underline{z'})$, d.h. $z' \in D(x)$, $r' \Vdash^* (\underline{z'} \in \underline{x})$, $r' \Vdash^* \overline{A(\underline{z'})}$. Mit $r' \leq r$, 1.5.3 und 1.4.4 folgt: es gibt $t \geq r$ mit $t \Vdash^* \overline{\underline{z} \in \underline{x} \wedge A(\underline{z})}$. Nach 1.4.5 folgt: $p \Vdash^* \overline{\underline{z} \in \underline{w} \vee (\underline{z} \in \underline{x} \wedge A(\underline{z}))}$. Aus (a) und (b) folgt die Beh..

4.2 Zu $(Ax5)^*$: Zur Terminologie vergleiche stets mit 2.2.1.

$(Ax5)^*$ hat für jede ZF-Formel $A(v_0, v_1)$ die Form $Pr \rightarrow Ko'$,

wobei Pr die Prämisse aus 2.2.1 ist und Ko' die Formel

$\forall x \exists w \forall z (\exists u (u \in x \wedge A(u, z)) \rightarrow z \in w)$ ist.

Sei $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* \neg Pr$. Sei $x \in K$.

Wie in 2.2.1 definieren wir für $a \in D(x)$ und $r_1 \geq r$:

$Q(r_1, a)$ sei ein Element $y \in K$ mit minimalem Rang bzgl. der Eigenschaft: $\exists r_2 \geq r_1 (r_2 \Vdash^* \overline{A(a, y)})$, falls ein solches y ex..

Setze $w_1 := \{Q(s, a) : s \geq r \wedge a \in D(x) \wedge s \Vdash^* (a \in x)\}$,

$w := H(w_1 \times C)$.

Da für alle $v \in D(w_1 \times C)$ gilt: $v \in K$, folgt mit Lemma 2.3:

$w \in K$.

Beh.: $\forall z \in K (r \Vdash \neg \exists c (c \in x \wedge A(c, z)) \vee z \in w)$.

Sei $t' \geq r$, $t \geq t'$ und es gelte $t \Vdash^* \exists c (c \in x \wedge A(c, z))$.

Dann gibt es $t_1 \geq t$ und $c \in K$ mit $t_1 \Vdash^* (c \in x)$ und $t_1 \Vdash^* \overline{A(c, z)}$.

Nach 1.5.4, 1.5.3 ex. $c' \in D(x)$ und $t_2 \geq t_1$ mit $t_2 \Vdash^* (c' \in x)$,

$t_2 \Vdash^* (c = c')$ und $t_2 \Vdash^* \overline{A(c', z)}$. Da $c' \in K$, folgt

$Q(t_2, c') \in w_1$. Also gibt es nach Def. von Q ein $t_3 \geq t_2$ mit

$t_3 \Vdash^* \overline{A(c', Q(t_2, c'))}$. Mit der Vor. (*) aus 2.2.1 folgert man

wie dort: es gibt $t_4 \geq t_3$ mit $t_4 \Vdash^* (z = Q(t_2, c'))$.

Ferner gilt $\langle Q(t_2, c'), t_4 \rangle \in w_1 \times C$. Es folgt:

$\langle Q(t_2, c'), t_4 \rangle = \langle H_I(Q(t_2, c')), \pi_I(t_4) \rangle \in H(w_1 \times C) = w$,

also $t_4 \Vdash^* (Q(t_2, c') \in w)$, also $t_4 \Vdash^* (z \in w)$.

Wie in 2.2.3 erhält man die obige Beh. für r und damit:

$r \Vdash^* \exists w \forall z (\neg \exists c (c \in x \wedge A(c, z)) \vee z \in w)$, d.h. $r \Vdash^* Ko'$.

Mit 1.4.5 folgt die Behauptung.

4.3 Zu (Ax6):

Lemma: Für $\alpha \in \text{On}$ ist $\hat{\alpha} \in K$.

Beweis: Zur Bezeichnung siehe Kapitel 2, § 3.

Nach 1.2 ist $C = \{\pi_f(p) : p \in C\}$ für jedes $f \in P$.

Wir zeigen rekursiv: $\text{Sym}(\hat{\alpha})$. Sei $f \in P$.

$$\begin{aligned} H_f(\hat{\alpha}) &= \{\langle H_f(\hat{\sigma}), \pi_f(p) \rangle : \langle \hat{\sigma}, p \rangle \in \hat{\alpha}\} \\ &= \{H_f(\hat{\sigma}) : \sigma < \alpha\} \times C \\ &= \{\hat{\sigma} : \sigma < \alpha\} \times C \quad (\text{nach Ind.-Ver.}) \\ &= \hat{\alpha}. \end{aligned}$$

Gelte jetzt für alle $\sigma < \alpha$: $\hat{\sigma} \in K$. D.h. für alle $x \in D(\hat{\alpha})$ ist $x \in K$. Da nach Teil 1 gilt: $\text{Sym}(\hat{\alpha})$, folgt nach Definition von K : $\hat{\alpha} \in K$.

Mit Hilfe des Lemmas erfolgt die Erzwingung des Unendlichkeitsaxioms jetzt wie in 2.3.2 und 2.3.3.

§ 5: Erzwingung der Negation des Auswahlaxioms

5.1 Der folgende Beweis verläuft sehr ähnlich zu dem üblichen modelltheoretischen Argument, bei dem man eine abzählbar unendliche Menge angibt, die Dedekind-endlich ist (siehe Cohen[4], S. 138). Zu jedem $z \in K$ geben wir eine abzählbare Familie $a_z \subseteq K$ von Elementen aus K an, für die wir erzwingen können, daß sie Teilmengen von ω sind, daß aber z kein Element aus $a_z \times C$ eindeutig auswählt. Damit erzwingen wir die (ZF-) gödelisierte Aussage: " $P(\omega)$ hat keine Auswahlfunktion". Eine wesentliche Rolle spielt dabei das Symmetriemaß: ist $x \in K$ und finden wir eine Bedingung r , die erzwingt, daß x gleich einem Element x' aus a_z ist, das Bild von $a_z \times C$ unter z ist, so können wir eine Permutation f finden, so daß $\pi_f(r) \cup r$ Bedingung ist, die erzwingt, daß x gleich einem Element x'' aus a_z ist, das Bild von $a_z \times C$, aber von x' verschieden ist.

5.2 Sei m definiert wie in 2.5.3. Mit der Tatsache $\hat{\alpha} \in K$ für $\alpha \in On$ (siehe 4.3) lassen sich die Argumente aus 2.5.3 übertragen und wir erhalten:

$\forall x \in K \forall p \in C(p \Vdash_m \ulcorner D(\underline{x}) \urcorner \leftrightarrow p \Vdash_m (\underline{x} = \hat{\underline{a}}))$, wobei $D(v_0)$ wieder die Formel ist, für die wir die Abkürzung $v_0 = \omega$ gebrauchen.

E sei die folgende Formel:

$\forall z \exists a \exists c (a \subseteq P(c) \wedge D(c) \wedge \exists x (x \in a) \wedge \neg \exists x (x \in a \wedge B(a, x, z) \wedge \forall y (B(a, y, z) \rightarrow y = x)))$, d.h. E ist äquivalent zu

$\neg \exists z (CF(z, P(\omega)))$. Da in der Prädikatenlogik herleitbar ist:

$E \rightarrow \neg AC$, genügt es nach 1.5.5 für unser Programm in 1.5.6,

wenn wir Folgendes zeigen: ist $m' := Rg^*(E)$ und

$n := \max(m', m)$, so gilt: $\forall p \in C(p \Vdash_m \ulcorner E \urcorner)$.

Sei $p \in C$. Dann gilt $p \Vdash_n \overline{D(\hat{\omega})}$. Mit 1.4.3 reduziert sich die Behauptung auf das Folgende: Ist $z \in K$, so ex. $a \in K$ mit:

- (1) $p \Vdash \exists y (y \in \underline{a})$
- (2) $p \Vdash \forall u (u \in \underline{a} \rightarrow \forall z (z \in u \rightarrow z \in \hat{\omega}))$
- (3) $p \Vdash \neg \exists x (x \in \underline{a} \wedge B(\underline{a}, x, \underline{z}) \wedge \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = x))$.

Dies geschieht in 5.4 und 5.5.

5.3 Def.: Für $\sigma \in \omega$ definieren wir:

$$N(\sigma) := \{ \langle \hat{\alpha}, q \rangle : \alpha \in \omega \wedge q(\alpha, \sigma) = i \}.$$

Lemma: $\forall \sigma \in \omega (N(\sigma) \in K)$

Beweis: Wir zeigen zuerst: $\text{Sym}(N(\sigma))$ ($\sigma \in \omega$).

Sei $f \in P$. Dann gilt: $H_f(N(\sigma)) = \{ \langle \hat{\alpha}, \pi_f(q) \rangle : \alpha \in \omega \wedge q(\alpha, \sigma) = 1 \}$,

da nach 4.3 $H_f(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$. Es gilt:

$$\{ \pi_f(q) : q(\alpha, \sigma) = i \} = \{ r : r(\alpha, f(\sigma)) = i \}.$$

$$\text{Also } H_f(N(\sigma)) = \{ \langle \hat{\alpha}, r \rangle : \alpha \in \omega \wedge r(\alpha, f(\sigma)) = i \} = N(f(\sigma)).$$

Ist $f \in P_\sigma$, so folgt $H_f(N(\sigma)) = N(\sigma)$, also gilt $\text{Sym}(N(\sigma))$.

Da ferner nach 4.3 für $x \in D(N(\sigma))$ folgt: $x \in K$, ergibt sich mit der Def. von K : $N(\sigma) \in K$.

Lemma: $\forall \alpha, \sigma \in \omega \forall r \in C (r \Vdash^* (N(\alpha) = N(\sigma)) \rightarrow \alpha = \sigma)$

Beweis: Analog zu 2.5.6 unter Benutzung der Endlichkeit von r .

5.4 Sei nun $z \in K$. Dann gibt es $\alpha \in \omega$ mit $H_f(z) = z$ für alle $f \in P_\alpha$.

Setze $a_1 := \{ N(\sigma) : \alpha < \sigma \wedge \sigma \in \omega \}$, $a := a_1 \times C$.

Für $f \in P_\alpha$ gilt $a_1 = \{ N(f(\sigma)) : \alpha < \sigma \wedge \sigma \in \omega \}$, also mit 1.2

$$\begin{aligned} H_f(a) &= \{ H_f(N(\sigma)) : \alpha < \sigma \} \times C \\ &= \{ N(f(\sigma)) : \alpha < \sigma \} \times C = a_1 \times C = a. \end{aligned}$$

Zusammen mit 5.3 folgt: $a \in K$.

Beweis von (1) aus 5.2: Es gilt $\langle N(\alpha+1), p \rangle \in a$, also

$p \Vdash^* (N(\alpha+1) \in \underline{a})$, also $p \Vdash^* \exists y (y \in \underline{a})$ und damit $p \Vdash \exists y (y \in \underline{a})$.

Beweis von (2):

Wir wenden 1.4.5 an. Sei $u \in K$, $r \in C$ und es gelte $r \Vdash^* (u \in \underline{a})$.

Dann gibt es $u' \in K$, $r' \leq r$ mit $\langle u', r' \rangle \in a$ und $r \Vdash^* (u = u')$.

Es folgt: $u' = N(\sigma)$ für ein $\sigma \in \omega$ mit $\alpha < \sigma$.

Da $N(\sigma) \subseteq \hat{\omega}$, ergibt sich mit 1.5.4:

$r \Vdash^* \forall v (v \in \underline{u} \rightarrow v \in \hat{\omega})$. Wegen $r \Vdash^* (u = u')$ gibt es nach 1.5.3

ein $s \geq r$ mit $s \Vdash^* \forall v (v \in \underline{u} \rightarrow v \in \hat{\omega})$. Mit 1.4.5 folgt:

$p \Vdash \underline{u} \notin \underline{a} \vee \forall v (v \in \underline{u} \rightarrow v \in \hat{\omega})$. Damit folgt (2).

5.5 Beweis von (3) aus 5.2:

Nach 1.4.3 gilt: $p \Vdash \neg \exists x (..) \leftrightarrow p \Vdash^* \neg \exists x (..)$.

Ann.: $\neg (p \Vdash^* \neg \exists x (x \in \underline{a} \wedge B(\underline{a}, x, \underline{z}) \wedge \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = x)))$.

Dann gibt es $r \geq p$ mit $r \Vdash^* \exists x (..)$. Also gibt es ein $x \in K$

mit $r \Vdash^* \underline{x} \in \underline{a} \wedge B(\underline{a}, \underline{x}, \underline{z}) \wedge \forall y (..)$. Nach 1.4.4 gibt es $r_1 \geq r$ mit

$r_1 \Vdash^* (\underline{x} \in \underline{a})$, $r_1 \Vdash^* B(\underline{a}, \underline{x}, \underline{z})$ und $r_1 \Vdash^* \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = \underline{x})$.

Nach 1.5.4 folgt: es gibt ein $x' \in D(a)$ mit $r_1 \Vdash^* (\underline{x}' \in \underline{a})$ und

$r_1 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{x}')$. Dann gibt es $\sigma \in \omega$, $\alpha < \sigma$ mit $r_1 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{N(\sigma)})$.

Nach 1.5.3 gibt es $r_2 \geq r_1$ mit

$r_2 \Vdash^* \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = \underline{N(\sigma)})$. Mit 2.1 folgt für $f \in P_\alpha$

wegen $H_f(a) = a$, $H_f(z) = z$ und $H_f(N(\sigma)) = N(f(\sigma))$:

$\pi_f(r_2) \Vdash^* \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = \underline{N(f(\sigma))})$.

Da r_2 endlich ist, kann man $\sigma' > \sigma$ so wählen, daß für alle

$k \in \omega$: $\langle k, \sigma' \rangle \notin D(r_2)$. $g \in P$ sei definiert durch $g(\sigma') := \sigma$,

$g(\sigma) := \sigma'$, g konstant sonst. Es folgt: $g \in P_\alpha$ und

$r_3 := r_2 \cup \pi_g(r_2) \in C$.

Nach 1.4.2: $r_3 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{N(\sigma)})$, $r_3 \Vdash^* \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = \underline{N(g(\sigma))})$.

Es folgt: zu x gibt es $r_4 \geq r_3$ mit:

$r_4 \Vdash^* \overline{B(a, \underline{x}, \underline{z})}$ oder $r_4 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{N(g(\sigma))})$. Da $r_3 \Vdash^* \overline{B(a, \underline{x}, \underline{z})}$ und $r_4 \geq r_3$, folgt mit dem Konsistenzlemma: $r_4 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{N(g(\sigma))})$.

Da $r_1 \Vdash^* (\underline{x} = \underline{N(\sigma)})$ und $r_4 \geq r_1$, gilt $r_4 \Vdash^* (\underline{N(\sigma)} = \underline{N(g(\sigma))})$.

Mit 5.3 folgt: $\sigma = g(\sigma)$, ein Widerspruch zur Def. von g .

Wir erhalten: $\mathfrak{P} \Vdash \neg \exists x (x \in \underline{a} \wedge B(\underline{a}, x, \underline{z}) \wedge \forall y (B(\underline{a}, y, \underline{z}) \rightarrow y = x))$,

damit sind die Behauptungen (1) - (3) aus 5.2 bewiesen.

5.6 Hauptsatz: Ist ZF widerspruchsfrei, so auch $ZF + \neg AC$.

Beweis: Die Theorie $ZF^* + \neg AC$ ist äquivalent zur Theorie

$ZF + \neg AC$. Mit den Ergebnissen dieses Kapitels er-

gibt sich die Behauptung wie in 2.5.8.

Literaturverzeichnis

- [1] P.J. Cohen: A minimal model for set theory, Bull. A.M.S. 69 (1963), 537 - 540
- [2] P.J. Cohen: The independence of the continuum hypothesis, Proc.Nat.Acad.Sci. 50 (1963) 1143 - 1148 und 51 (1964), 105 - 110
- [3] P.J. Cohen: Independence results in set theory, in: The theory of models, Proc. of the 1963 intern. symposium at Berkeley, ed. by Addison e.a., Amsterdam 1965, 39 - 54
- [4] P.J. Cohen: Set theory and the continuum hypothesis, New York 1966
- [5] U. Felgner: Models of ZF-set theory, Springer lecture notes in mathematics 223, Berlin 1971
- [6] A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: Foundations of set theory, 2. Auflage, Amsterdam 1973
- [7] K. Gödel: The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis, Proc.Nat.Acad.Sci. 24, (1938), 556 - 557
- [8] K. Gödel: Consistency of the continuum hypothesis, Princeton 1944
- [9] S. Görnemann: Boolesch-wertige Modelle, Vortragsmanuskript Hannover 1969
- [10] M. Holz: Ein syntaktischer Beweis der relativen Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms, Diplomarbeit München 1970
- [11] T. Jech: Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing, Springer lecture notes in math. 217, Berlin 1971

- [12] R.B. Jensen: Concrete models of set theory, in: Sets, models and recursion theory, ed. by J. Crossley, Amsterdam 1967
- [13] R.B. Jensen: Modelle der Mengenlehre, Springer lecture notes in math. 37, Berlin 1967
- [14] G. Karp: A proof of the consistency of the continuum hypothesis, in: Sets, models and recursion theory, ed. by J. Crossley, Amsterdam 1967
- [15] A. Levy: Definability in axiomatic set theory I, in: Logic, methodology and philosophy of science, ed. by Y. Bar-Hillel, Amsterdam 1965
- [16] A. Mostowski: Constructible sets with applications, Amsterdam-Warschau 1969
- [17] K. Schütte: Vorlesung über axiomatische Mengenlehre, München Wintersemester 1969|70
- [18] D. Scott: Boolean-valued models for set theory, Vorlesungsmanuskript Los Angeles 1967
- [19] J.C. Shepherdson: Inner models for set theory, J.S.L. 16 (1951), 161 - 190; 17 (1952), 225 - 237; 18 (1953), 145 - 167
- [20] J.R. Shoenfield: Mathematical logic, Reading Mass. 1967
- [21] J.R. Shoenfield: Unramified forcing, Vorlesungsmanuskript Los Angeles 1967
- [22] G. Takeuti-W. Zaring: Introduction to axiomatic set theory, Berlin 1971

Liste der Symbole

$v_0, v_1, \dots$	6	$W(u)$	10	$z = xy$	15
$\neg, \vee$	6	$Bij(u)$	10	$\dot{n}$	15
$\exists$	6	$u \times v$	10	$\ulcorner \epsilon \urcorner$	16
$\in, =$	6	$\alpha, \sigma, \dots$	10	$\ulcorner _ \urcorner$	16
$x, y, z, u, v, \dots$	6	ω	10, 53	$\ulcorner _ \urcorner$	16
$rg(A)$	7	$u'x$	10	$\ulcorner \vee \urcorner$	16
$\rightarrow, \wedge, \leftrightarrow$	7	$\leq$	10	$\ulcorner \exists \urcorner$	16
$\forall$	7	$Vtr(x, y)$	10	$\ulcorner v_k \urcorner$	16
$\forall x \in y(A)$	7	$CF(w, x)$	10	$GZ(x)$	16
$\exists x \in y(A)$	7	$(Ax8)$	10	$Kst(x)$	16
$\vdash_\Phi$	8	ZFC	10	$\underline{x}$	16
$(Ax1)-(Ax4)$	8	$\mathcal{X}$	10	$AtF(x)$	16
$(Ax5)-(Ax7)$	9	$ x $	10	$\ulcorner v_k \in v_l \urcorner$	16
$\subseteq$	9	(CH)	10	$\ulcorner v_k = v_l \urcorner$	16
0	9	$\{x: A\}$	10	Fml	16
$\{x, y\}$	9	On	11	$\ulcorner D \urcorner$	17
$x \cup y$	9	V	11	$Rg(x)$	17
$Trs(u)$	9	x^{ω}	11	Var	17
$Ord(u)$	9	Seq	11	Vbl	17
$Lim(u)$	9	V_α	11	$Fr'(u, w, x)$	18
$\langle u, v \rangle$	9	$r(x)$	11	$Fr(w, x)$	18
Uu	9	Fund(u)	12	Aus(α)	18
$\cap u$	9	ZF^*	14	Subst _K (x, y)	18
$Pu, P(u)$	9	$(Ax2)^* - (Ax5)^*$	14	VSubst _K (x, y)	18
Su	9	$(Ax9)$	14	KF(α, y)	19
$Rel(u)$	9	$(Ax8)^*$	14	KA(α, y)	19
$Fkt(u)$	9	ZR(z)	15	Gr [*] (α, y)	19
$D(u)$	9	Kom	15	KF(y)	19

$KA(y)$	19	S	63
Sub_K^n	19	$N(\sigma)$	63,82
$Ers(u,v,y)$	19	P	68
$QKA(x)$	20	I	68
QK	20	f^+, f, g	68
$(\underline{x} \leq \underline{y})$	20	P_α	68
$(\underline{x} = \underline{y})$	20	$\pi(f,p)$	69
C	21	$\pi_f(p)$	69
$p,q,r,\dots$	21	$H_f(x)$	69
ϵ_C	21	$Sym(x)$	69
$\ _{\bar{n}}^*$	21,23,24	$HS(x)$	70
R_0	22	$K(x)$	70
$Gr(\alpha,y)$	23	$H(x)$	73
$\ _{\bar{n}}$	24		
$\overline{A(x_1, \dots, x_n)}$	24		
$\overline{A(v_k/\underline{x})}$	24		
$Rg^*(A)$	31		
$Consis(T)$	39		
$Q(a,a)$	50		
$Nf(x,y)$	53		
$Z(x)$	53		
$Ind(u)$	53		
$D(v_0)$	53		
$\hat{\alpha}$	53		
$Sur(x,y)$	58		
$B(v,u,z)$	58		
$\Delta KB(x, \leq)$	59		
$Sep(u)$	59		

Lebenslauf

8.7.1945 Geboren in Saarbrücken als Sohn von Hermann Holz
 und seiner Ehefrau Roswitha, geb. Schmidt

1951 Einschulung in Nieheim, Krs. Höxter

 Besuch der Volksschule in Wittlaer bei Düsseldorf
 und in Düsseldorf

1955 Aufnahmeprüfung zum Jacobi-Gymnasium in Düsseldorf

1958 Wechsel zum Arndt-Gymnasium in Krefeld

1964 Reifeprüfung

SS 64 - WS 66|67 Studium der Mathematik an der Universität des
 Saarlandes in Saarbrücken, Vordiplom im Herbst 1966

SS 67 - SS 70 Mathematikstudium an der Universität in München,
 Hauptdiplom im Frühjahr 1970

15.7.70-31.12.70 Verwalter einer wiss. Assistentenstelle am
 Leibniz-Kolleg der Universität Tübingen

1.1.71-31.12.71 Verwalter einer wiss. Assistentenstelle am Institut
 für Mathematik der Technischen Universität Hannover

seit 1.1.72 wiss. Assistent in Hannover

